EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

III

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

KORT VERSLAG VAN DE BESTUURSVERGADERING

van de groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. op
Donderdag 17 September 1953 te Utrecht

1. De notulen van de vorige vergadering worden gelezen en goedgekeurd. Ook de concept-notulen van de ledenvergadering in Driebergen worden gelezen; ze zullen worden gepubliceerd in het Weekblad en in Euclides. Naar aanleiding van de notulen wordt gesproken over het tijdschrift Euclides en over de leesportefeuille van Wimecos. In het Weekblad zal nog eens op beide gewezen worden.
2. Uit ingekomen en verzonden stukken blijkt:
   a) De vacantiecursus over sterrenkunde is mede georganiseerd door Liwenagel. Het is een groot succes geworden; er waren meer dan 200 deelnemers.
   b) Aan het College van Inspecteurs V.H.M.O. zijn twee brieven geschreven, één over de invoering van ons B-rapport en één over het onderwijs in Mechanica aan de gymnasium-B-leerlingen op sommige Lycea.
   c) De gecombineerde vergadering met de groep Classici zal op 4 Januari 1954 in Utrecht worden gehouden.
   d) Aan een verzoek om Weekbladen uit de jaren 1928 t/m 1946 ter completering van het Liwenagel-archief werd voldaan door Dr Van IJzeren, Dr Schrek en Mejuffrouw Dr. C. C. ter Haar.
   e) Van het Drachtster Lyceum is een verzoek om advies binnengekomen voor het geval, dat de natuurkundeleraar de Natuurwetenschappen in 5A-gymnasium moet doceren. Dit zal beantwoord worden.
3. Het onderwijs in de exacte vakken aan de gymnasium-afdeling van de Lycea wordt nog eens besproken.
4. Vertegenwoordigers van Liwenagel naar het bestuur van het Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen worden aangewezen. Voor het aanstaande Congres worden enige thema's geopperd.
5. De vraag hoe de Liwenagelrapporten didactisch verwezenlijkt kunnen worden is een punt van uitvoerige discussie. Enige richtlijnen worden vastgesteld.

6. Dr Vredenduin wordt aangewezen als vertegenwoordiger van Liwenagel bij het Mathematisch Centrum in de plaats van prof. Dr Wielenga, die wegens drukke werkzaamheden moet bedanken.
7. De vraag is gesteld, of Liwenagel-leden, die gepensionneerd worden, en dus buitengewoon lid van het Genootschap worden, lid van Liwenagel kunnen blijven. Deze vraag moet bevestigend worden beantwoord.

De 2e secretaris,

D. LEUJES

AAN DE LEDEN VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Kent U de *tijdschriftencirculatie* van Wimecos?

In circulatie zijn:

a) Elemente der Mathematik (Basel): 6 maal per jaar.
b) The Mathematical Gazette (Londen): 5 „ „ „
c) The Mathematical Teacher (New-York): 8 „ „ „
d) Unterrichtsblätter (Bonn-Frankfurt): 6 „ „ „
e) Paedagogische Studiën (Groningen): 12 „ „ „
f) Mathem.-Physikalische Semesterberichte (Göttingen): 350 blz. per jaar.
g) School Science and Mathematics.
h) Uitgaven van het Wiskundig Genootschap.

Het leesgeld voor elk tijdschrift (*h* alléén is gratis) bedraagt *f* 1,50 *per jaar*, ook voor leden van L.i.w.e.n.a.g.e.l.

Geeft U op bij de verzorger van deze portefeuille:

G. J. J. BOOST

PARKLAAN 107a - ROOSENDAAL (N.Br.)

GIRO 212199

met vermelding van de gewenste tijdschriften.

OVER ENIGE PRINCIPES IN DE MECHANICA [1])

door

Prof. dr P. MULLENDER

De mechanica neemt onder de natuurwetenschappelijke vakken een bijzondere plaats in. Zij houdt zich bezig met de beweging van stoffelijke lichamen, en moet dus beschouwd worden als een onderdeel van de physica. Het merkwaardige is nu, dat de mechanica, in de vorm waarin dit vak gedoceerd wordt, vaak meer lijkt op wiskunde dan op natuurkunde. Het is dan ook heel gewoon als het onderwijs in de mechanica aan de universiteit niet aan een physicus, maar aan een mathematicus wordt opgedragen; en zo staat ook thans een wiskundige voor U, die aan deze Universiteit o.a. de theoretische mechanica voor zijn rekening heeft gekregen. Hieruit blijkt wel duidelijk, dat er speciaal in de mechanica wel een zeer nauw contact moet bestaan tussen de physica en de wiskunde.

Welnu, waar twee gebieden elkaar raken, daar ontstaan meestal grenskwesties. Zo is het ook hier; de ontmoeting tussen de wiskunde en de physica schept allerlei vragen en problemen; en wij zullen er niet aan ontkomen ons met verschillende van die problemen te moeten bezighouden, als wij gaan spreken over het onderwerp dat ik voor deze rede gekozen heb, namelijk „OVER ENIGE PRINCIPES IN DE MECHANICA".

Hierbij denk ik in het bijzonder aan drie principes, die in nauw verband met elkaar staan: het principe van de virtuele verplaatsingen, het principe van D'ALEMBERT en het principe van HAMILTON.

Als men hoort spreken over de klassieke mechanica, dan krijgt men vaak de indruk van een voltooid bouwwerk, zorgvuldig afgewerkt, hoogstens een beetje ouderwets naar de smaak van de moderne physicus, maar in de ogen van een mathematicus het ideaal van exactheid. Die indruk verliest men enigszins als men zich gaat bezighouden met de drie zo juist genoemde principes. Het blijkt

---

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de wiskunde en de mechanica aan de Vrije Universiteit te Amsterdam, op 22 September 1952.

de mechanica niet steeds even duidelijk is. JACOBI merkt reeds op in zijn Vorlesungen uber Dynamik (p. 44), als hij het heeft over het principe van de kleinste werking, dat in nauw verband staat met het principe van HAMILTON: „Dies Princip wird fast in allen Lehrbuchern, auch in den besten, in den von POISON, LAGRANGE und LAPLACE, so dargestellt, dass es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist". Echter, de behandeling van dit principe door JACOBI zelf is evenmin erg bevredigend. Hij werkt op zulk een formele wijze met zijn formules, dat zijn betoog de mathematische overtuigingskracht mist.

Sinds JACOBI zijn er vele boeken over de mechanica geschreven. Maar ook nu zijn er nog genoeg vragen overgebleven, niet alleen wat betreft de formulering, maar ook wat betreft de aard en de betekenis van de principes, hun plaats in de theorie en hun realiteitsachtergrond. Het is niet mijn bedoeling hier al die vragen te beantwoorden. Ik wil slechts op enkele ervan wat nader ingaan. Vooraf moge ik echter een korte uiteenzetting geven van de inhoud van de genoemde principes en van de mechanische problemen waarop ze betrekking hebben.

We zullen onderscheid maken tussen twee soorten van bewegingsproblemen, namelijk die van de vrije beweging en die van de gedwongen beweging. Een probleem van de eerste soort is dan bijvoorbeeld dat van de beweging van een kogel onder invloed van de zwaartekracht, of dat van de beweging van de zon en de planeten onder invloed van de wederzijdse aantrekking. Een probleem van de tweede soort krijgen we, als we de beweging van een spoorwagon beschouwen, die rijdt op de rails, of van een bal, die rolt over een tafel.

In het eerste geval, dus bij de vrije beweging, is van te voren niets gegeven omtrent de beweging zelf. Het gaat erom de beweging van het systeem, waarmee we te doen hebben, te berekenen met behulp van andere gegevens, bijvoorbeeld de krachten, die de delen van het systeem op elkaar uitoefenen.

In het geval van de gedwongen beweging zijn er wel gegevens omtrent de beweging van het systeem, maar die gegevens zijn alleen nog niet voldoende om de beweging volkomen te bepalen; de wagon kan verschillende snelheden hebben, zowel in de ene als in de andere richting, en de bal kan op de tafel nog alle kanten uitrollen. We spreken in dit geval van een systeem met verbindingen, en de krachten, die met de verbindingen corresponderen, noemt men de verbindingskrachten. Hier is het probleem om met behulp van de verdere gegevens, namelijk de krachten die van buiten af op het

systeem werken, de zogenaamde aangebrachte krachten, de beweging volledig te bepalen. De moeilijkheid is in dit geval, dat men, om de beweging te kunnen afleiden met behulp van de bekende regel kracht is massa maal versnelling, niet de aangebrachte, maar de effectieve krachten moet kennen, d.w.z. de aangebrachte krachten plus de verbindingskrachten. De verbindingskrachten nu, zijn niet zelf bekend, maar alleen het effect dat zij sorteren, namelijk dat de verbindingen gehandhaafd blijven. Het probleem is dus: Hoe komt men aan die verbindingskrachten? Of liever gezegd, hoe kan men die verbindingskrachten uit het vraagstuk elimineren, zodat men direct uit de gegeven aangebrachte krachten de beweging van het systeem kan afleiden.

De eerste twee door mij genoemde principes hebben betrekking op problemen van de tweede soort, dus op systemen met verbindingen.

Het principe van de virtuele verplaatsingen geeft een regel om vast te stellen, wanneer er evenwicht zal optreden. De regel luidt: Als het systeem in rust is, dan zullen de aangebrachte krachten die rust niet verstoren, indien zij bij geen enkele virtuele verplaatsing van het systeem arbeid verrichten. Wat we hierbij onder een virtuele verplaatsing moeten verstaan, zal ik thans niet bespreken. Voorlopig is het voldoende als we hierbij denken aan een kleine denkbeeldige verandering van positie, die in overeenstemming is met de verbindingen. Dus we laten in gedachten de wagon een millimeter voor- of achteruit rijden en de bal een heel klein eindje over de tafel de een of andere kant uit rollen. Men ziet, de verbindingskrachten worden in het principe niet genoemd; het principe geeft inderdaad de gewenste eliminatie van de verbindingskrachten, in het geval dat er evenwicht moet optreden.

Het principe van D'ALEMBERT betreft het geval, dat er geen evenwicht behoeft op te treden. In de formulering van dit principe vindt men echter nogal grote verschillen. Ik wil daarom aan de formulering van dit principe iets meer aandacht wijden.

D'ALEMBERT zelf formuleert zijn principe in drie uitspraken. We kunnen er gemakkelijk twee van maken, door zijn derde uitspraak op elk van de eerste twee toe te passen. In onze terminologie — D'ALEMBERT spreekt zelf niet over krachten maar over bewegingen (mouvements), en gebruikt dus helemaal niet de termen aangebrachte, effectieve en verbindingskrachten — komt hetgeen hij zegt op het volgende neer:

1. Als de aangebrachte krachten worden vervangen door de effectieve krachten, m.a.w. als de effectieve krachten als aangebrachte

krachten optreden, dan zal het systeem zich ongehinderd bewegen, dus zo, alsof er geen verbindingen waren.

2. Als de aangebrachte krachten worden vervangen door de aangebrachte min de effectieve krachten, dus door de negatieve verbindingskrachten, dan zal het systeem in het geheel geen beweging ontvangen.

Op deze wijze geformuleerd biedt het principe weinig houvast. De aangebrachte krachten worden ontbonden in de effectieve krachten en de negatieve verbindingskrachten, en blijkbaar is verondersteld, dat die ontbinding door de gedane uitspraken ondubbelzinnig is vastgelegd. Zonder verdere gegevens is dat echter niet het geval.

Die verdere gegevens zijn evenwel te vinden in de leer van het evenwicht, die D'ALEMBERT aan de behandeling van zijn principe vooraf doet gaan. Past men namelijk die leer van het evenwicht toe op het in de tweede uitspraak veronderstelde geval, dan is die ontbinding van de aangebrachte krachten wel ondubbelzinnig bepaald. Het merkwaardige is echter, dat we dan de eerste uitspraak niet meer nodig hebben. Wat daarin staat volgt dan vanzelf.

LAGRANGE en de meeste schrijvers van boeken over de mechanica met hem vatten de tweede uitspraak nu op als het eigenlijke principe van D'ALEMBERT. Maken we de formulering iets beknopter, dan wordt het principe dus:

De aangebrachte krachten verminderd met de effectieve krachten veroorzaken bij de gegeven verbindingen geen beweging.

Tegen deze opvatting kan men twee bezwaren inbrengen. Het eerste is, dat op deze manier het principe niet volledig weergeeft wat D'ALEMBERT beweert. Immers, de eerste uitspraak heeft men dan geheel weggelaten. Het tweede bezwaar is, dat dan niet in het principe is opgenomen wat door D'ALEMBERT blijkbaar wel is vooronderstеld, namelijk de toepassing van de leer van het evenwicht.

Beide bezwaren kan men ondervangen door het principe van de virtuele verplaatsing als evenwichtsprincipe in de formulering van het principe van D'ALEMBERT op te nemen. Verschillende schrijvers doen dit dan ook, en zij formuleren het principe van D'ALEMBERT dan aldus:

De aangebrachte krachten verminderd met de effectieve krachten verrichten geen arbeid bij een willekeurige virtuele verplaatsing van het systeem.

Als algemeen evenwichtsprincipe is hier dus gekozen het principe van de virtuele verplaatsingen. D'ALEMBERT kon zijn principe niet op deze wijze formuleren, omdat hem nog geen algemeen evenwichts-

principe ten dienste stond. Hij moest zich telkens op speciale principes beroepen. Dit kan men natuurlijk weer aanvoeren als bezwaar tegen de laatstgegeven formulering.

Zoals uit het voorgaande blijkt, zijn beide formuleringen van het principe van D'ALEMBERT te verdedigen. Niettemin blijft het verwarrend, vooral voor iemand die pas met de studie van de mechanica begint, dat ze naast elkaar voorkomen, want het is duidelijk dat ze geenszins met elkaar equivalent zijn.

Tenslotte het principe van HAMILTON. Dit kan toegepast worden, zowel op problemen van de eerstgenoemde soort, als op die van de tweede soort, dus zowel op systemen zonder verbindingen als op systemen met verbindingen. Het is één van de zogenaamde variatieprincipes, en het stelt vast dat de variatie van een zekere integraal gelijk aan nul moet zijn. Het is niet mogelijk dit principe in een paar woorden uit te leggen. Ik moet daarom wel volstaan met deze zeer korte aanduiding. Ik vermeld alleen nog, dat het begrip variatie zeer nauw samenhangt met het begrip virtuele verplaatsing.

Ik besluit deze beknopte uiteenzetting van de inhoud der drie principes met een opmerking over het verband tussen het principe van D'ALEMBERT en dat van HAMILTON. Welke formulering van het principe van D'ALEMBERT men ook kiest, het staat vast dat het principe betrekking heeft op een systeem met verbindingen. Past men het toe op een systeem zonder verbindingen, dan wordt het gereduceerd tot de triviale uitspraak, dat in dat geval de aangebrachte en de effectieve krachten identiek zijn. Dit is echter niet equivalent met de uitspraak, dat de kracht gelijk is aan de massa maal de versnelling. Deze laatste uitspraak hebben we, zij het als definitie, zij het als stelling, nodig naast het principe van D'ALEMBERT om uit de effectieve krachten weer de versnellingen te berekenen. Het principe van D'ALEMBERT legt uitsluitend verband tussen de aangebrachte en de effectieve krachten en niet tussen de krachten en de versnellingen. Het is van belang dit uitdrukkelijk vast te stellen, omdat men dan meteen inziet dat het principe van D'ALEMBERT in geen geval equivalent kan zijn met het principe van HAMILTON. Immers, het principe van HAMILTON legt een direct verband tussen de aangebrachte krachten en de beweging van het systeem, die er het gevolg van is. Het is dus verstrekkender dan het principe van D'ALEMBERT. We zullen hier nog op terug komen. Ik maak deze opmerking omdat door sommigen, ik noem bv. KIRCHHOFF, de equivalentie van beide principes uitdrukkelijk wordt geponeerd.

Na deze, ietwat uitvoerige, inleiding willen we thans wat dieper ingaan op enkele vragen betreffende de betekenis en de achtergrond van de principes.

Allereerst de term principe. Deze term roept allerlei associaties op, vooral ook omdat men, behalve van de drie door mij genoemde principes, ook spreekt van verschillende andere principes, bijvoorbeeld het principe van de hefboom, het principe van het behoud van de zwaartepuntsbeweging, het principe van het behoud van de energie, om er maar niet nog meer te noemen.

Men kan nu vragen: Moet men de principes in de mechanica opvatten als uitspraken van bijzonder karakter, bijvoorbeeld als uitspraken die moeten dienen als grondslag, als uitgangspunt voor de theorie of als algemene slotconclusies, of moet men aan de naam geen andere dan een historische betekenis toekennen?

HERTZ schrijft in zijn Principien der Mechanik (p. 4): „Im strengen Sinne verstand man ursprunglich in der Mechanik unter einen Prinzip jede Aussage, welche man nicht wieder auf andere Satze der Mechanik selbst zurück führte, sondern welche man als unmittelbares Ergebnis anderer Quellen der Erkenntnis angesehen wissen wollte". Hierna stelt hij echter vast, dat allerlei uitspraken, die eens, misschien terecht, de naam principe ontvangen hebben, die naam nog steeds hebben behouden, hoewel zij hem eigenlijk niet meer verdienen. Hij vervolgt dan, dat hij dergelijke uitspraken wel hun gebruikelijke benaming zal laten behouden, maar dat hij, indien hij spreekt over de principes in het algemeen, slechts die uitspraken bedoelt die moeten dienen als grondslag voor zijn theorie en waarvoor dus geldt: „dass sich aus ihr ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesammte Mechanik rein deduktiv entwickeln lässt".

Wat betreft het gebruik van de naam principe voor concrete uitspraken volgen de meeste auteurs dezelfde gedragslijn als HERTZ, al zijn er weinigen die dat ook zo duidelijk zeggen. Men doet dan ook goed met aan de naam principe voor een of andere concrete uitspraak geen conclusies te verbinden.

Duidelijk blijkt echter, dat HERTZ met de principes in het algemeen wel heel bijzondere uitspraken bedoelt. Uit die principes wil hij namelijk door louter deductieve redenering de gehele mechanica afleiden.

Dit brengt ons er toe om de vraag naar de betekenis van de term principe opnieuw te stellen, maar nu aldus: Moet men de principes in de mechanica opvatten als hypothesen of als axioma's, als wetten of als stellingen?

Het antwoord zal grotendeels bepaald worden door het antwoord

op algemene vragen, zoals: Wat is de rol van de wiskunde in de theoretische physica? En betreft de theorie de werkelijkheid zelf, dus de dingen om ons heen, of slechts onze waarnemingen en gewaarwordingen, of is de theorie een bouwwerk van onze gedachten?

Dat het antwoord op deze vragen ook van betekenis is voor de behandeling van de drie concrete principes waar wij thans over spreken, zal ik in het volgende trachten aan te tonen.

Het is merkwaardig, dat de tegenwoordige mechanicaboeken al deze vragen nauwelijks, of zelfs helemaal niet, aanroeren. JONKER heeft verleden jaar in zijn rede over werkelijkheid, waarneming en theorie in de natuurkunde gewezen op de terughoudendheid bij vele physici als het gaat over wijsgerige problemen. Die terughoudendheid komt duidelijk uit in de opzet van de moderne leerboeken van de theoretische mechanica. Men stelt zich daarin meestal op een min of meer practisch standpunt. Aan de ene kant werkt men met intuïtieve begrippen en aanschouwelijke redeneringen, terwijl men aan de andere kant zich uitslooft om scherpe mathematische omschrijvingen te geven en te voldoen aan alle eisen van wiskundige strengheid, bijvoorbeeld door uitvoerig allerlei voorwaarden aan te geven van continuïteit en differentiëerbaarheid. Het resultaat is echter, dat de mathematicus zich onbevredigd blijft gevoelen door het telkens — en voor hem vaak onverwacht — terugkerend beroep op de aanschouwing, terwijl de physicus geprikkeld wordt door de, naar zijn oordeel, te ver doorgedreven wiskundige strengheid. Noch de een, noch de ander ziet duidelijk de gronden, waarop de verschillende uitspraken van de theorie berusten en de betekenis en draagwijdte van die uitspraken.

Op de hier geschetste bezwaren, die het gevolg zijn van het zich niet van te voren bezinnen op de wijsgerige problemen, stuit men onmiddellijk bij de behandeling van de drie principes, die wij in beschouwing hebben genomen.

Bij systemen met verbindingen beperkt men zich meestal tot volkomen gladde of volkomen ruwe oppervlakken, wrijvingsloze scharnieren, niet rekbare, gewichtsloze verbindingsdraden, volkomen starre staven, enz., en dat zijn allemaal dingen, die in de natuur niet voorkomen. De principes van de virtuele verplaatsingen en van D'ALEMBERT hebben betrekking op dergelijke systemen. Indien ergens, dan is hier de vraag op haar plaats: Hebben deze principes nu betrekking op de werkelijkheid of op een gedachtenconstructie? En we staan dan meteen voor het probleem, hoe we de geldigheid van die principes moeten aantonen. Moet dat geschieden door middel van het experiment of door middel van mathematische

deductie? Of hebben we misschien te doen met uitspraken, die in het geheel niet voor verificatie vatbaar zijn?

De moeilijkheden spitsen zich nog verder toe bij de definitie van de begrippen virtuele verplaatsing en variatie. Vaak is het helemaal niet duidelijk, wat daaronder verstaan wordt. Sommigen spreken over kleine of oneindig kleine aangroeiingen van de coördinaten en anderen over differentialen of differentiaal-quotiënten naar de een of andere parameter. Echter, indien de theorie betrekking heeft op de dingen om ons heen, die niet glad of star zijn, of indien zij betrekking heeft op onze waarnemingen, die nooit volkomen nauwkeurig zijn, heeft het dan nog zin, om over differentialen en differentiaal-quotiënten te spreken? En indien de theorie toch slechts een gedachtenconstructie is, kunnen we dan niet beter uitsluitend over differentialen en differentiaal-quotiënten spreken in plaats van over aangroeiingen?

Zo zien we ons telkens weer voor het probleem gesteld, welke rol de wiskunde vervult in de mechanica, en in verband daarmee, welke betrekking er bestaat tussen de theorie en de werkelijkheid.

Willen we inderdaad iets vinden van philosophische verantwoording van de methode van behandeling, dan moeten we oudere werken opslaan. Doen we dit, dan constateren we duidelijk een zekere ontwikkeling. Oorspronkelijk maakte men geen scherp onderscheid tussen de mechanica en de wiskunde. Langzamerhand echter, kwam het karakter van de mechanica als ervaringswetenschap steeds meer naar voren, terwijl tegenwoordig iedereen de mechanica als een onderdeel van de physica beschouwt en niet meer als een onderdeel van de wiskunde. Het laatste betekent niet, dat men thans kan zeggen, dat het probleem van de verhouding tussen de mechanica en de wiskunde is opgelost. Het betekent alleen maar dat dat probleem in wezen hetzelfde is geworden als het probleem van de verhouding tussen de physica en de wiskunde.

Het is natuurlijk niet mogelijk om hier uitvoerig op deze ontwikkelingsgeschiedenis in te gaan. Slechts enkele namen wil ik noemen.

Ik begin bij D'ALEMBERT, omdat we ons toch ook speciaal met zijn principe bezighouden. Aan zijn Traité de Dynamique laat hij een Discours préliminaire voorafgaan, waarin hij uitvoerig zijn standpunt uiteenzet. Het blijkt al op de eerste bladzijde dat hij de mechanica geheel tot de wiskunde rekent. Hij spreekt dan ook voortdurend over „les mathématiciens" als hij de beoefenaren van de mechanica bedoelt. Heel karakteristiek is verder zijn bespreking

van de vraag „si les lois de la Statique et de la Mécanique sont de vérité nécessaire ou contingente?" Duidelijk blijkt daaruit aan de ene kant welk een uiterst geringe rol hij aan de ervaring doet toekomen bij de fundering van de theorie en aan de andere kant hoe er bij hem nog nauwelijks onderscheid bestaat tussen de theorie en de werkelijkheid.

Interessant en belangrijk is vervolgens het standpunt van HERTZ. Zoals we gezien hebben, wil hij de gehele mechanica door louter deductieve redenering en zonder verder beroep op de ervaring afleiden uit enige algemene principes. Hij begint zijn eerste boek aldus (p. 53): „Den Überlegungen des ersten Buches bleibt die Erfahrung vollig fremd. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne Kant's." Van de uitspraken in het tweede boek zegt hij echter (p. 157): „Diese Aussagen stützen sich nicht mehr allein auf die Gesetze unserer Anschauung und unseres Denkens, sondern ausserdem auf vorangegangene Erfahrung. Den Anteil der letzteren aber, soweit er nicht schon in den Grundbegriffen enthalten ist, werden wir zusammenfassen in eine einzige allgemeine Aussage, welche wir als Grundgesetz voranstellen". Het merkwaardige is, dat HERTZ aan zijn wiskundige grondstellingen één algemeen, op de ervaring gefundeerd „Grundgesetz" toevoegt, en daarop dan zijn systeem bouwt, dat verder zuiver wiskundig van karakter is. Wat betreft het verband van dat systeem met de werkelijkheid; volgens hem is de theorie wel niet de werkelijkheid zelf, maar toch een beeld van de werkelijkheid en daarmee zo nauw verbonden, dat het voldoet aan de eis, dat de „denknothwendigen Folgen der Bilder" moeten corresponderen met de „naturnothwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände."

In het voorbijgaan wil ik even opmerken, dat de door HERTZ gegeven opzet van de mechanica op bijzondere wijze de grotere algemeenheid van het principe van HAMILTON illustreert in vergelijking met het principe van D'ALEMBERT. Zijn „Grundgesetz", waarin volgens hem alle ervaring is verdisconteerd, is namelijk een veralgemening van het principe van HAMILTON. Door hiervan uit te gaan kan hij het begrip kracht geheel vermijden. Dat had hij niet kunnen doen, als hij alleen maar het principe van D'ALEMBERT tot zijn beschikking had gehad. Nu echter komt het principe van D'ALEMBERT in zijn boek helemaal niet voor.

Nog slechts twee namen wil ik noemen en dat zijn dan ook wel de belangrijkste in dit verband, namelijk ERNST MACH en HENRI POINCARÉ.

Anders dan HERTZ fundeert MACH de mechanica geheel en ál

in de ervaring. In zijn werk Die Mechanik in ihrer Entwickelung [1] zegt hij bijvoorbeeld, als hij het heeft over het principe van de virtuele verplaatsingen (p. 77): „Es ist wichtig sich klar zu machen, dass es bei dem Prinzip lediglich um Constatirung einer Thatsache handelt. Unterlässt man dies, so fühlt man immer einen Mangel, und sucht nach einer Begründung, die nicht zu finden ist." En enige bladzijden verder schrijft hij (p. 81): „dass es keinen Sinn hat, eine Regel für mehr gesichert zu halten, indem man sie auf andere stûtzt, welche (nur etwas früher) auf ganz denselben Wege der Beobachtung gewonnen worden sind."

Niettemin blijkt MACH evenals HERTZ de theorie als zuiver wiskundig van karakter te zien. Bij zijn bespreking van het boek van HERTZ schrijft hij namelijk (p. 283): „Die Physik gewöhnt sich allmählich ohnehin, die Beschreibung der Thatsachen durch Differentialgleichungen als ihr eigentliches Zeil anzusehen, welcher Standpunkt auch in vorliegender Schrift vertreten wurde. Hiermit ist die allgemeine Anwendbarkeit der Hertz'-schen mathematischen Aufstellungen anerkannt."

Wat betreft het verband tussen de theorie en de werkelijkheid is MACH echter weer wat meer gereserveerd dan HERTZ. MACH schrijft (p. 280): „Der Glaube an einer Naturnothwendigkeit entsteht nur wo unsere Begriffe der Natur hinreichend angepasst sind, um Folgerung und Thatsache in Übereinstimmung zu halten. Die Annahme einer genügenden Anpassung unserer Begriffe kann aber jeden Augenblick durch die Erfahrung widerlegt werden."

POINCARÉ, tenslotte, brengt een volledige scheiding aan tussen de theorie en de werkelijkheid. In zijn boek La Science et l'Hypothèse erkent ook hij de mechanica als experimentele wetenschap. Maar daarna vraagt hij onmiddellijk of daaruit dan niet volgt, dat de principes van de mechanica slechts een benaderde en voorlopige geldigheid bezitten. Hij merkt dan op (p. 111), dat de moeilijkheid van de beantwoording van deze vraag voornamelijk hieruit voortvloeit, dat de boeken over de mechanica „ne distinguent pas nettement ce qui est expérience, ce qui est raisonnement mathématique, ce qui est convention, ce qui est hypothese."

De conclusie, waartoe POINCARÉ na uitvoerige beschouwingen komt, is, dat de principes van de mechanica twee verschillende aspecten vertonen (p. 162): „D'une part, ce sont des vérités fondées sur l'expérience et vérifiées d'une façon tres approchée en ce qui concerne des systemes presque isolés. D'autre part, ce sont des

---

[1]) De citaten zijn ontleend aan de vijfde druk (1904).

postulats applicable a l'ensemble de l'univers et regardés comme rigoureusement vrais."

Men kan dus zeggen, dat POINCARÉ de theorie als wiskundig bouwwerk onderscheidt van de theorie als werkelijkheidsbeschrijving en daarmee heeft hij dan meteen de plaats van de wiskunde in de mechanica aangewezen. In nauw verband met deze scheiding tussen wiskundige theorie en werkelijkheid staat POINCARÉ's opvatting, dat de ordening van de verschijnselen, zoals die in de theorie gegeven wordt, niet in de eerste plaats uit de verschijnselen zelf voortvloeit, maar veel meer een product is van de menselijke geest. Op deze wijze wordt het element van menselijke willekeur in de opbouw van de wiskundige theorie zeer versterkt en daardoor haar afstand tot de werkelijkheid nog vergroot.

Zowel MACH als POINCARÉ hebben duidelijk hun stempel gedrukt op de tegenwoordige mechanica. De invloed van MACH komt allereerst hierin uit, dat men thans algemeen het experiment als de grondslag van de mechanica erkent. Ook ziet men niet meer, zoals vroeger, de theorie als verklaring van de verschijnselen, maar slechts als beschrijving; en dan niet een beschrijving van de werkelijkheid zelf, maar slechts van onze waarnemingen, van onze zintuigindrukken. Wat dat laatste betreft is men tegenwoordig vaak nog meer positivistisch ingesteld dan MACH zelf. Op deze punten ben ik niet ingegaan, omdat ik mij moet beperken.

POINCARÉ's invloed blijkt verder duidelijk uit het feit, dat men de theorie als een soort wiskundig model meer zelfstandigheid toekent tegenover de wereld der verschijnselen. Het element van menselijke willekeur in de opbouw van de theorie beperkt men echter enigszins, door de eenvoud en de bruikbaarheid van dat wiskundige model als noodzakelijke voorwaarden te aanvaarden, en te erkennen, dat niet alle modellen die men zou kunnen vormen in dit opzicht gelijkwaardig zijn.

Het resultaat van deze ontwikkeling is bij sommigen, dat de physische wetenschap het karakter van kennis van de werkelijkheid verliest, om in de eerste plaats te worden tot methode, namelijk om verder te komen. Men reduceert dan de physica tot een afwisselend waarnemen en vormen van wiskundige modellen. De waarneming heeft men nodig om tot de vorming van een wiskundig model te kunnen komen, en omgekeerd leidt dat model weer tot verdere waarneming. Echter, het probleem in hoeverre de physica, en in het bijzonder de mechanica, kennis van de werkelijkheid betekent, roert men niet aan.

Toch zullen we de vraag naar de realiteitsachtergrond van de

theorie niet mogen laten rusten. Immers, waar wil men eigenlijk heen als het de bedoeling is om steeds verder te komen? Gaat het er uiteindelijk slechts om, dat wij de natuur zullen kunnen beheersen of willen wij ook in de natuur Gods werken zien en bewonderen? Welnu, hoe zullen wij die werken Gods bewonderen als ons de vraag niet interesseert in hoeverre de theorie kennis der werkelijkheid betekent?

Maar met alleen de vraag te stellen hebben we haar nog niet beantwoord. We moeten ook oppassen, niet al te lichtvaardig te zijn met die beantwoording. We zijn er bijvoorbeeld niet mee, als we een één-één-correspondentie aanbrengen tussen de begrippen en uitspraken van onze theorie en de dingen en feiten in de werkelijkheid. Op deze manier zouden we onze ogen sluiten voor de ontwikkeling van de moderne physica. Hier is wel degelijk diepgaande studie noodzakelijk.

Wij willen thans evenwel terugkeren tot onze drie principes. Het blijkt dan wel heel duidelijk, dat we hierbij inderdaad met wiskundige modelvorming te doen hebben. Immers, men werkt met mathematische punten (al noemt men ze stoffelijk) en met meetkundige figuren (al spreekt men van lichamen). Bewegingen zijn transformaties met parameter t. Het begrip star is niets anders dan het invariant zijn voor congruente transformaties. Op deze manier zouden we nog wel een hele tijd door kunnen gaan. We beperken ons verder tot de principes.

Het principe van de virtuele verplaatsingen nu, is slechts de wiskundige formulering van wat men in de mechanica wrijvingsloos of volkomen glad pleegt te noemen. Wiskundig gezien is het een eigenschap, die men naar believen al of niet aan een systeem kan toekennen.

Het principe van D'ALEMBERT geeft de uitbreiding van het begrip wrijvingsloosheid voor systemen die in beweging zijn. Ook dit principe geldt dus slechts voor bepaalde systemen. Het is heel gemakkelijk om aan een systeem zulke eigenschappen toe te kennen, dat het principe van D'ALEMBERT er niet voor geldt.

Tenslotte geeft het principe van HAMILTON ook slechts een wiskundige eigenschap voor de wiskundige bewegingskrommen.

Wil men nu de betekenis van deze drie principes nagaan, dan moet men die echter niet in de wiskunde zoeken. Immers, niet de wiskundige juistheid bepaalt de betekenis van een physische theorie, maar alleen haar toepasbaarheid op de verschijnselen. In die eis van toepasbaarheid ligt het experimenteel karakter van de theorie. Dat experimentele karakter moet men dus niet daarin zoeken, dat men elk begrip direct experimenteel fundeert, of dat men zo-

genaamde physische begrippen invoert en daarop dan allerlei wiskundige bewerkingen toepast. Een dergelijke methode leidt slechts tot onheldere voorstellingen en ernstige begripsverwarring. Zo ontstaan nu precies die bezwaren, die we zopas hebben ingebracht tegen de opzet van vele moderne mechanicaboeken. Men behoeft niet aan de wiskundige opzet van de theorie te tornen om het experimenteel karakter van de mechanica te waarborgen. Nog eens, dat experimentele karakter ligt in de eis van toepasbaarheid.

Welnu, wat betreft die toepasbaarheid, is er een groot verschil tussen de eerste twee principes, namelijk die van de virtuele verplaatsingen en dan D'ALEMBERT, en het principe van HAMILTON. Dat blijkt al dadelijk hieruit, dat het principe van D'ALEMBERT opgevat kan worden als een bijzonder geval van het principe van HAMILTON, al is dan de formulering geheel verschillend. Het verschil tussen het principe van HAMILTON en de andere twee is echter nog dieper.

In de eerste twee principes speelt het begrip kracht de voornaamste rol. Dat begrip kracht nu, is een typisch macroscopisch begrip. Het is ontleend aan onze voorstelling van de tastbare werkelijkheid. Vandaar dat b.v. OSGOOD in zijn Mechanics het aldus definieert (p. 1): „Bij a force is meant a push or a pull." Deze definitie is overigens als definitie onjuist, want hij vat een kracht in feite op als een vector, en dat is een wiskundig begrip. Hij had hoogstens mogen zeggen, dat wij bij het begrip kracht denken aan „a push or a pull."

In verband met de macroscopische oorsprong van het begrip kracht staat het macroscopisch karakter van de principes van de virtuele verplaatsingen en van D'ALEMBERT. Men past ze in de eerste plaats toe op problemen die betrekking hebben op onze tastbare omgeving, bijvoorbeeld op katrollen, hefbomen enz,

Met het principe van HAMILTON is het echter anders gesteld. We hebben reeds gezien, dat het mogelijk was met behulp van het principe van HAMILTON het krachtbegrip geheel uit te schakelen. Dit is al een aanwijzing, dat het principe van HAMILTON in zijn toepassing niet op dezelfde wijze gebonden is aan macroscopische problemen. Inderdaad blijkt het principe, in zijn oorspronkelijke en in veralgemeende vorm, een machtig hulpmiddel in vele onderdelen van de physica, van de sterrekunde tot de atoomtheorie.

Ik wil hiermee besluiten. Vele vragen heb ik gesteld. Slechts weinige heb ik getracht te beantwoorden. Ik hoop echter, dat het U duidelijk geworden is, dat ook in het oude gebouw van de klassieke mechanica de moderne problemen van de physica tevoorschijn treden.

DIDACTISCHE REVUE

I. *The Mathematical Gazette,* vol. XXXVII, no. 321, Sept. 1953; edited for the Mathematical Association by T. A. A. Broadbent.

Inhoud.

De samenwerking van Teachers of Secondary Education en andere schooltypen met wetenschapsbeoefenaars uit de universitaire sfeer leidt tot een rijk gevariëerde inhoud van de opvolgende nummers van de Mathematical Gazette.

Een drietal artikelen over meetkundige problemen zijn zorgvuldige bestudering waard:

R. H. Cobb geeft in "A Symbolism for the Geometry of the Triangle" een notatie-systeem, dat hem in staat stelt belangrijke resultaten uit de leer van de driehoek uiterst compact te formuleren en andere niet expliciet geformuleerde eigenschappen af te leiden.

S. J. Taylor behandelt "Some simple geometrical extremal problems".

E. H. Neville geeft een artikel over "Involution".

Het uitvoerigst is het "Presidential Address to the Mathematical Association" van de nieuwe voorzitter K. S. Snell, onder de titel: "School Mathematics Today and Tomorrow".

De auteur interesseert zich voor de vraag, hoe ons wiskunde-onderwijs er over een 50 jaar uit zal zien.

Het "activity"-principe zal de gang van ons onderwijs beheersen; een bindende rooster zal, er, speciaal voor de Junior School, niet meer zijn. Er zal reeds op deze school tijd vrij gemaakt worden voor het bijbrengen van wiskundige begrippen, b.v. van functies, van grafische voorstellingen, zelfs van "early ideas of differentiation and integration of functions". De leerling leert modellen maken en feiten als het Theorema van Pythagoras ten grondslag leggen aan berekeningen en practisch werk. "Proving results will have vanished as completely as has Euclid's sequence today".

Meetkunde zal enkel onderwezen worden volgens analytische methoden, meetkundige toepassingen zijn voornamelijk vier-dimensionaal; ze zullen betrekking hebben op het vier-dimensionale ruimte-tijd-continuum. De behoefte aan puzzlen zal aan topologische problemen bevredigd kunnen worden. "Applied mathematics

at school will no longer be confined to mechanics, but will include the study of statistics, hydrostatics, electrostatics and nuclear fission". Het Engelse stelsel van Maten, Gewichten en Geld zal door een decimaal stelsel zijn vervangen.

De schr. bepleit het geven van niet-systematisch meetkunde-onderwijs op de Junior Schools.

In de Secondary Schools "the geometrical emphasis is on drawing and calculation". Maar vraagstukken maken (bewijzen) mag er niet bij inschieten. "I believe that rider work is vital and opens the door of mathematical thought and methods to many".

Deductieve arbeid mag niet in het gedrang komen. Pure geometry en analytical geometry zullen tot één methode worden samengesmolten, zonder de dreiging van verwaarlozing van het element der "pure geometry". "One of the dangers I foresee at present is to magnify the importance of analytical work, and belittle the importance of pure geometry methods". De auteur pleit ook voor "purely projective methods" en voor een behandeling van complexe getallen tot en met de logarithmen van complexe getallen. Voor het onderwijs in Calculus worden drie stadia aangewezen. Een algemene inleiding, waarin veeltermen worden gedifferentiëerd en geïntegreerd, zal de leerlingen b.v. in staat stellen de inhoudsformule voor de bol af te leiden. Het tweede stadium "includes the differentiation of other algebraic and trigonometrical functions, and simple methods of integration, and the idea of a definite integral as a limit of a sum". De "better scientists" komen hier tot dubbele en drievoudige integralen en tot een inleiding van de Fourier-reeksen. De derde fase is "for the more able mathematical specialist". Strengheid t.a.v. begrippen als limiet, continuïteit, differentiëerbaarheid komen nu tot hun recht.

Logarithmen worden gebaseerd op de theorie der bepaalde integralen. Het begrip booglengte krijgt een zorgvuldige behandeling "giving the definition of length as an integral, and hence leading to a course of differential geometry, extended to include curvature and evolutes".

De auteur heeft er bezwaar tegen, dat aan "pure mathematics" en aan "applied mathematics" gelijke gewichten worden toegekend, en prefereert een verdeling in drie secties: "Analysis, Geometry, Mechanics".

Van de verdere ideeën van de auteur vermelden we nog, dat hij in de school belangstelling wil wekken voor tal van moderne theorieën (Einstein's begrip van relatieve tijd tegenover Newton's begrip van absolute tijd; Euclidische en niet-Euclidische ruimten), zonder tot

een systematische behandeling van de desbetreffende leerstof te komen.

"Our duty in schools is to send students to universities full of desire to investigate further, rather than worn out or deadened with continued repetition of artificial problems".

18 bladzijden "Mathematical Notes" en 20 bladzijden "Reviews" besluiten deze aflevering.

Onder de "Notes" zijn tal van belangwekkende. We noemen: A simple proof that all large integers are sums of at most eight cubes. Isosceles triangles with integral sides and two integral medians (hierin wordt aangetoond dat er geen gelijkbenige driehoeken zijn, waarvan de lengten van zijden en zwaartelijnen alle gehele getallen zijn). On gauge constructions and a letter of Hjelmslev.

R. L. Goodstein rectificeert een zin uit zijn artikel in nummer 320, waarin hij ten onrechte de "rigid motion group" identificeerde met de groep der projectieve collineaties die een gegeven involutie op de oneindig verre rechte invariant laten. "The rigid motion group is of course a self-conjugate subgroup of this group of collineations".

IIa. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 6. Band, 3. Heft, 1953/54; Bonn/Rhein; Frankfurt/M.

Inhoud.

Prof. dr. W. Gerlach uit München schrijft over „Naturwissenschaft und Humanismus". Humanistische vorming zonder studie van de natuurwetenschappen mag men sedert het begin van de 17e eeuw niet meer waarlijk humanistisch noemen. Naar aanleiding van het misbruik dat door mensen van de techniek gemaakt kan worden, merkt de schr. op: „Es ist ein bedenkliches Zeichen geistiger Verirrung, wenn man diese Schuld der Technik und damit ja auch der Naturwissenschaft zuschiebt." „Nicht die Naturwissenschaften bringen den Menschen in Gefahr die geistige Verbindung mit der Natur, den Blick auf das humanum zu verlieren, sich abzuwenden von dem steten Nachdenken über die Stellung die sie im Aufbau der Wissenschaften, in der inneren Ordnung des menschlichen Seins einnimmt; nicht in der Technik liegt eine Gefahr, sondern in ihrer Einordnung in das Materielle statt in das humanum. Alle Gefahren können und müssen beseitigt werden durch die Pflege ihrer allgemeinen geistigen Beziehungen durch einen humanistischen Unterricht, durch humanistische Erziehung".

W. Klumpp wijst in „das Grundphänomen in der Biologie" op de gevaren verbonden aan een te vroegtijdige behandeling van de genen-theorie op de middelbare scholen, op de verwarring tussen model en de werkelijkheid achter dit model. Hij komt tot een verregaande beperking der gangbare leerstof.

Van de mathematische onderwerpen, die in deze aflevering betrekkelijk weinig plaats innemen, noemen we:

A. Siebel, „Zum Gregoryschen Näherungsverfahren" en „Zur π-Berechnung auf der Mittelstufen";

Benthaus, „Zur Lösung des Hanssenschen Aufgabe";

Möller, „Zur Herleitung von Additionstheoremen";

Eckle, „die Gleichung n-ten Grads mit unendlich grossen Wurzeln und die Asymptoten algebraischer Kurven".

IIb. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 6. Band, 4. Heft, September 1953; Bonn/Rhein; Frankfurt/M.

Inhoud.

In het eerste artikel „Das Problem der Grundlegung des mathematischen Unterrichts" brengt K. Resag verslag uit van een conferentie op initiatief van de Zwitserse Sectie van de New Education Fellowship gehouden over het thema: „Didaktik der Mathematik in Kindergarten und Grundschule". Op deze conferentie spraken o.a.: Piaget, Drenckhahn, Frau Inhelder, Fisher, Montessori, Lietzmann en Gonseth.

„Wie bilden sich die mathematische Bausteine beim Kinde, und was kann die erwachsene Generation dabei helfen?" was de vraag die men in de diverse besprekingen trachtte te beantwoorden.

Piaget ging aan de hand van experimentele onderzoekingen na, dat de logica van het kind van die van de volwassene verschilt. In de lagere leerjaren overheerst de betekenis van de konkrete handeling, eerst op zeven- à achtjarige leeftijd ontstaat er een konkrete logica. De ervaring is conditio sine qua non voor latere mathematische ontwikkeling. „So wie die Operationen erst aus Erfahrungen mit den Gegenständen verständlich werden -was dem Physiker eine Selbstverständlichkeit erscheint-, so reift auch die mathematische Abstraktion aus der Handlung und bedeutet kein geistiges a priori. Das Kind musz erst mit Material handeln dürfen; sonst ist es nicht imstande, gedankliche oder gar formale Schlüsse zu ziehen, die letzten Endes die Wissenschaft Mathematik ausmachen. Abstrakte Beziehungen bedürfen zu ihrer Erkenntnis der stufenweisen Los-

lösung aus den konkreten Verhältnissen von Gegenständen und Materialien".

H. Hoffmann geeft in zijn artikel „Zur Reifeprüfung 1952 in der DDR" die mathematischen Reifeprüfungsaufgaben für alle Oberschulen in der DDR (Oost-Duitsland).

Voor de mathematisch-naturwissenschaftlichen Klassen werden drie opgaven gegeven (tijd 330 minuten) van de volgende aard: één opgave over de functie $y = 0{,}4\ (\sin x + 2 \sin 2x)$; één opgave over de inhoudsberekening van een vat waarvan de meridiaandoorsnede begrensd wordt door twee bogen van parabolen en twee lijnstukken; één opgave over een zonnestandsberekening. De opgaven voor „die neu-bzw. altsprachlichen Klassen" zijn eveneens opgenomen.

Ook het mondeling examen is gecentraliseerd! We lezen:

„Die mündliche Reifeprüfung wurde im Jahr 1952 erstmalig mit zentral ausgearbeiteten und für alle Schulen verbindliche Prüfungsfragen durchgeführt. Die Fragen standen zu je drei auf einem Zettel und wurden den Schulleitern in verschlossenen Umschlägen zugestellt. Erst bei Beginn der mündlichen Prüfung durften diese Umschlägen von dem Prüfungsvorsitzenden geöffnet werden. Die Fachlehrer kannten die Prüfungsfragen nicht. Jeder Prüfling muszte vor der Einzelprüfung beim Prüfungsvorsitzenden einen verdeckten Zettel ziehen und hatte nach 15 Minuten Vorbereitung alle drei Fragen des einen Zettels in 10 bis 15 Minuten zu beantworten. Es war nicht gestattet, einen zweiten Zettel zu ziehen.

Jeder Prüfungszettel stellte dem Schüler drei Teilfragen. Die Teilfrage *a*) erstreckte sich über einen gröszeren Zusammenhang, die Teilfrage *b*) auf einen Teilzusammenhang, die Teilfrage *c*) forderte eine Anwendung bzw. Auswertung der vorher erörterten Zusammenhänge auf einen Spezialfall."

Er volgen 48 stellen vragen voor de wiskunde.

Analoge stellen vragen zijn opgenomen voor Natuurkunde en Biologie.

In de bijdrage „aus der Geschichte der Kegelschnitte" wordt op eenvoudige wijze aangetoond „wie man aus der elementaren Festlegung der Kegelschnitte bei Euclid durch geeignete Bezeichnungen der vorkommenden Strecken die bekannten Scheitelgleichungen der analytischen Geometrie erhält. So kann die gedankliche Verbindung der Darstellung bei Euclid und bei der heutigen analytischen Geometrie über zweieinhalb Jahrtausende hinweg zum Bewusztsein gebracht werden".

O. Bosch schrijft over „Komplementäre Extremwertaufgaben"

en R. Laemmel over: „der Fraktionensatz, ein wenig bekannter Lehrsatz von Jacob Steiner (1796—1863)". Ch. Ahrens oefent kritiek uit op Böhme's artikel over Lebensnahe Mathematik-Aufgaben uit de vorige aflevering: „der Mathematiklehrer an der höheren Schule kann die gestellte Forderung im algemeinen gar nicht erfüllen, „Ideen" zu praxisnahen Aufgaben zu haben; auch seine wirklich „praktisch" aussehenden Aufgaben werden meist „gemacht" sein, wenn der Autor nicht selbst Praktiker ist oder gewesen ist, oder wenigstens mit Praktikern enge Fühling hat" . . . „Zu bedenken ist vor allem, dasz die Forderungen an eine schulische Aufgabensammlung in erster Linie vom mathematischen Stoffzusammenhang und dem Gedankenlauf der Darstellung hergestellt werden müssen, und beides geht meist ganz andere wege als die praktische Mathematik des Ingenieurs" . . . „Wirklich lebensnahe und praktische Bedeutung besitzende Aufgaben, im Hinblick auf die Verwertbarkeit in mathematischen Schul-Aufgabensammlungen betrachtet, sind also aus zwei Gründen meist ungeeignet dafür: entweder sie erfordern bei mathematischer Brauchbarkeit einen im Schulunterricht undurchführbaren und abwegigen Aufwand an Sachkenntnis-Vermittlung, oder es sind einfache, mathematisch uninteressante Rechenschieberaufgaben".

Tot slot vermelden we nog een bijdrage van J. Fischer over Nomogrammen en een artikel van R. Lauffer: „Zusammenhänge von Sätzen der elementaren Geometrie".

IIIa. *Elemente der Mathematik*; Band VIII, 4; Juli 1953; Birkhäuser, Basel.

Inhoud.

IIIb. *Elemente der Mathematik*; Band VIII, 5; September 1953; Birkhäuser, Basel.

Inhoud.

1. L. Locher-Ernst, Bilder zur Geometrie der regelmässigen Figuren;
2. P. Bernays, Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie;
3. Kleine Mitteilungen — Aufgaben — Literaturüberschau.

Het artikel van Locher-Ernst geeft figuren van regelmatige veelhoeken, die herinneringen opwekken aan de in Nederland thans welbekende films van Jacquemart.

Besproken worden o.a. de volledige tienhoek en de volledige kubus, naar i.h.b. het volledige dodecaëder, een configuratie bestaande uit 60 punten, 60 vlakken en 72 rechten. Door ieder der 60 punten gaan 6 rechten en 15 vlakken, in ieder der 60 vlakken liggen 6 rechten en 15 punten. Ieder der 72 rechten is incident met 5 punten en met 5 vlakken. „Es lohnt die Mühe, sich mit dem Aufbau der Konfiguration, die zu den schönsten Gebilden des Raumes gehört, im Einzelnen vertraut zu machen”.

IVa. *Paedogogische Studiën,* XXX, 9; September 1953; Wolters, Groningen.

P. Bakkum schrijft over de Functie van het Schoolgebouw, i.h.b. met het oog op lagere scholen, maar veel uit het artikel is ook voor het V.H.M.O. van belang. De scholenbouw is nog te zeer traditioneel bepaald; samenwerking van hygiënist, ingenieur, architect, stedebouwkundige, bestuursambtenaar en paedagoog is noodzakelijk. Onderwijsvernieuwing komt ook in de scholenbouw tot uitdrukking.

D. M. van Willigen bepleit „Meer aandacht voor de groep”. Het werken met „de groep” stelt de opvoeder-onderwijzer voor een serie paedagogische, psychologische en didactische problemen, die grotendeels nog op bestudering wachten. De auteur betreurt, dat bij de onderwijzersopleiding veelal de resultaten van tientallen jaren van sociologisch onderzoek geheel worden genegeerd.

IVb. *Paedagogische Studiën,* XXX, 10; October 1953; Wolters, Groningen.

D. de Boer spreekt over: Opvoeding tot Democratie.

P. Post behandelt: Het tekenen op scholen voor V.H.M.O.; de plaats van het tekenen en overgangs- en eindexamens.

Dit artikel is van betekenis in verband met de herziening van de examenprogramma's voor de examens M.O.-tekenen, waartoe de Minister van O, K. en W., aan prof. dr H. van de Waal, hoogleraar in de Kunstgeschiedenis te Leiden, opdracht heeft gegeven. „Als een vak bij machte is de koude sfeer van verstandelijke training en technische vorming, die het V.H.M.O. in de school en in de huiskamer brengt, minder te doen domineren (ten voordele van die training en vorming zelf), dan is het de aesthetische vorming: expressie èn interpretatie. Maar zij moet in het schoolgeheel normaal gewaardeerd worden en met cijfers, die meetellen, **ook bij het eindexamen**", aldus de heer Post.

BOEKBESPREKING

Noordhoff's Wiskundige tafels in 5 decimalen. (*f* 8,75).

In deze prachtige uitgave is inderdaad, zoals de bewerker, de Heer Wijdenes, in het voorbericht schrijft, alles verenigd, wat men redelijkerwijs verlangen kan.

Behalve de gewone tafels nl. de logarithmen voor het grondtal 10 en de logarithmen van de goniometrische verhoudingen is er een tafel om graden en centigraden en radialen in elkaar over te voeren.

Verder een tafel van de goniometrische verhoudingen, waarbij de hoeken in graden en in radialen zijn uitgedrukt, terwijl er bovendien een serie bijtafels is.

Deze laatste bevatten:

1. De natuurlijke logarithmen van 0 tot 1000 en de natuurlijke logarithmen van priemgetallen beneden 10.000 (waarbij die beneden 1000 tot in 8 decimalen).
2. De verandering van natuurlijke logarithmen in gewone.
3. Tafels voor e^x en e^{-n}; voor $\sinh x$ en $\cosh x$.
4. Tafels voor priemgetallen.
5. Tafels voor machten, wortels en omgekeerden.
6. Tafels voor $x!$; $\log_{10} x!$; voor $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$; voor de foutenintegraal en de Besselfuncties, terwijl het boek eindigt met een serie constanten.

Bij de tafels onder no 6 heeft de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum zijn medewerking verleend in de personen van de professoren Bruins en Van Wijngaarden.

De uitgave is uitstekend verzorgd, terwijl bovendien de aanwijzingen in zes verschillende talen gegeven zijn en de tafels gemakkelijk te vinden zijn, doordat ze op papier van verschillende kleur gedrukt zijn. Daar komt nog bij, dat de prijs, voor hetgeen men ontvangt, laag te noemen is.

H.M.

De Juiste Maat. J. Sittig en Prof. Dr. H. Freudenthal. Uitg. Stafleu Leiden 1951, ƒ 20.—.

De statistiek, waaronder men vroeger alleen verstond het verzamelen van gegevens en het verwerken van deze gegevens in een tabel of een grafiek, is tegenwoordig geheel van karakter veranderd. Terwijl het verzamelen van gegevens nog de onontbeerlijke grondslag vormt, ligt het zwaartepunt der statistiek nu in de wiskundige interpretatie van deze gegevens.

Dat de belangstelling voor de zich nog steeds uitbreidende statistiek groeiende is, ligt, behalve aan het belang voor de biologische, medische, natuurkundige, sterrekundige en andere wetenschappen, mede voor een deel aan de grote economische voordelen, verbonden aan de toepassing van statistische methoden in de practijk van techniek, handel, bedrijf, landbouw, enz. Nog een uitgebreid toepassingsgebied ligt open.

Als interessant voorbeeld kan dienen een statistisch onderzoek op het gebied van het damesconfectiebedrijf, beschreven in het boek „De Juiste Maat". In opdracht van N.V. Mag. „De Bijenkorf" werd ten behoeve van de confectieindustrie in Augustus 1947 onder leiding van J. Sittig van het Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek te Den Haag een onderzoek ingesteld naar de lichaamsafmetingen der Nederlandse vrouw Daartoe werden door 18 meetsters in de filialen van De Bijenkorf te Amsterdam, Rotterdam en Den Haag van elk van ruim 5000 bezoeksters 15 lichaamsafmetingen bepaald en enige persoonlijke gegevens opgenomen. Het doel was, met behulp van deze metingen een maatsysteem voor damesconfectie te ontwerpen, dat de vermaakkosten voor het passend maken van de gekochte kleding, de z.g. pompkosten, tot een minimum terugbracht. De oplossing van dit probleem en de gebruikte statistische methoden en berekeningen worden in het 284 bladzijden tellende tweede gedeelte van De Juiste Maat door J. Sittig uitvoerig en degelijk beschreven. In een eerste gedeelte van 92 bladzijden geeft Prof. Dr. H. Freudenthal van de Universiteit te Utrecht een bespreking zonder wiskunde van de toegepaste methoden, slechts gebruik makende van tabellen, grafieken en diagrammen ter toelichting. Als men dit buitengewoon helder en bevattelijk geschreven eerste gedeelte, dat door geestige tekeningen van de Heer Arntz is opgeluisterd, populair wil noemen, dan moet men hierbij toch niet denken aan een gebrek aan exactheid. In een kort derde gedeelte van 26 bladzijden, meer als een appendix te beschouwen, geeft Prof. Freudenthal een speciaal voor statistici bestemde analyse der gebruikte methoden.

In De Juiste Maat worden eerst uitvoerige correlatieberekeningen uitgevoerd, die als resultaat te zien geven, dat de lichaamsafmetingen in twee groepen uiteenvallen, de dikteafmetingen en de lengteafmetingen De dikteafmetingen, zoals taille, bovenwijdte, heupomvang, enz. vertonen een nauwe samenhang, evenals de lengteafmetingen, zoals lengte, ruglengte, voorlengte, enz. Tussen een dikteafmeting en een lengteafmeting bestaat echter slechts geringe correlatie, zodat b.v. het passen van kousen om de gebalde vuist geen garantie voor goed passen geeft. De dikteafmetingen vertonen scheve verdelingen, terwijl de verdeling van een lengteafmeting symmetrisch is.

Na het correlatieonderzoek worden berekeningen uitgevoerd over de

pompkosten. De gang der berekeningen is zeer in het kort als volgt. Bij een bepaalde waarde van de heupomvang komen verschillende waarden van de bovenwijdte voor, waarvan men het gemiddelde kan bepalen. Tussen de verschillende heupomvangen en de bijbehorende gemiddelde bovenwijdten blijkt een lineair verband te bestaan. De vergelijking die dit verband aangeeft heet de regressievergelijking van de bovenwijdte op de heupomvang. Uitgaande van de heupomvang als basisafmeting kan men de andere afmetingen schatten uit de verschillende lineaire regressievergelijkingen op de heupomvang. De werkelijk voorkomende waarden van een afmeting liggen echter om die schatting heen. Daar de kledingstukken gefabriceerd worden naar de geschatte afmetingen, zullen pompkosten optreden, als de afwijking tussen werkelijke en geschatte waarden van een afmeting groter is dan de voor die afmeting nog toegestane tolerantie. Nadat aangetoond is, dat gebruik gemaakt mag worden van de tabellen der normale verdeling, kan men vinden welk percentage van het geheel buiten het tolerantiegebied valt. De gemiddelde pompkosten bij elke afmeting zijn ook bepaald en met deze gegevens kan men dan de totale pompkosten vinden. Het blijkt, dat de pompkosten minimaal zijn bij de keuze van de taille als basisafmeting, waaruit de andere afmetingen geschat worden. Het boek geeft dan volledig uitgewerkt een op de taille gebaseerd maatsysteem en wel in de uitvoering Standaard en in de met geringere verschillen opklimmende uitvoering Maatklasse.

Het is duidelijk, dat uit de taille de andere dikteafmetingen tamelijk goed geschat kunnen worden, maar dat door de geringe correlatie tussen dikte- en lengteafmetingen de lengteafmetingen meer speling zullen vertonen. Als beste systeem wordt dan ook in De Juiste Maat een tweedimensionaal systeem gepropageerd met twee basisafmetingen, een dikte- en een lengteafmeting. Het blijkt, dat de pompkosten het meeste gereduceerd worden, als men als basisafmetingen neemt de taille en de ruglengte. Ook hier wordt een volledige uitwerking gegeven in de uitvoeringen Standaard en Maatklasse.

Om het hierboven geschetste centrale onderzoek heen groeperen zich talloze extra metingen en extra berekeningen, wat weerspiegeld wordt in de 138 tabellen en 127 figuren en grafieken, die in het boek voorkomen. Aan de ene kant zijn extra metingen uitgevoerd voor toepassingen buiten het eigenlijke onderzoek. Zo werden afmetingen van handen en voeten bepaald voor handschoenen- en schoenenfabrikanten. Een extra groep van 32 vrouwen werd gekleed, half gekleed en ongekleed gemeten, zodat met de hieruit bepaalde correctietermen voor anthropometrische doeleinden de waarden der metingen aan de 5000 geklede vrouwen omgezet kunnen worden in naaktmetingen. Voor de sociale wetenschappen zijn de persoonlijke gegevens van belang. Zo blijkt o.a. dat welstand de lengte doet toenemen en de huwelijkse staat de dikte. Eigenlijk vindt men wiskundig alleen de correlatie, zodat oorzaak en gevolg ook omgekeerd zouden kunnen liggen. Aan de andere kant zijn voor het eigenlijke onderzoek ook vele extra gegevens verzameld en controlemetingen uitgevoerd, mede om het toepassen van bepaalde bewerkingen te rechtvaardigen en b.v. de nauwkeurigheid der meetsters te bepalen.

Een zeer belangrijk punt, dat nadere beschouwing ten volle verdient,

is de foutencorrectie die in De Juiste Maat is toegepast. Evidente administratieve fouten zijn gemakkelijk te herstellen, evenals, ter vermijding van oncontroleerbare fouten, bewust ingevoerde afrondingsfouten. Minder evidente administratieve fouten worden door tweedimensionale controle achterhaald. Hierbij worden van elke gemeten vrouw twee bepaalde afmetingen als coördinaten in een plat vlak beschouwd. Men krijgt zodoende 5000 punten. Die punten, die buiten een bepaalde correlatie-ellips vallen, geven een te onwaarschijnlijke combinatie van de beide afmetingen, die elk op zichzelf wel aannemelijk zouden kunnen zijn.

De belangrijkste foutencorrectie betreft echter de toevallige fouten, die men normaal verdeeld mag aannemen met gemiddelde nul en een standaardafwijking, die te bepalen is uit herhaalde metingen aan zelfde personen. Men kan een meting beschouwen als de algebraïsche som van de werkelijke waarde en de meetfout. Van de frequentieverdelingen van de metingen en van de meetfouten zijn de momenten te berekenen. Met de in het boek afgeleide formules kan men hieruit de momenten van de frequentieverdeling der werkelijke waarden vinden. Met deze gecorrigeerde momenten zijn gecorrigeerde waarden voor correlatiecoëfficiënten en regressiecoëfficiënten te berekenen. Ook is een gecorrigeerde correlatie-ellips te bepalen. In alle drie de gevallen betekent de correctie een verscherping van de resultaten. Hoewel de momenten van de gecorrigeerde frequentieverdeling bekend zijn, is deze frequentieverdeling zelve nog niet bekend. Toch heeft men deze nodig voor het vaststellen van die, in De Juiste Maat gegeven, assortimenten voor een winkelier, waarbij na verloop van een seizoen zo min mogelijk restanten overblijven. De gecorrigeerde frequentieverdeling is in De Juiste Maat als volgt bepaald. Men kiest van de krommen van Pearson dat type, dat het beste overeenkomt met de ongecorrigeerde frequentieverdeling. Men neemt aan, dat de gecorrigeerde frequentieverdeling van hetzelfde type is, wat achteraf gerechtvaardigd blijkt. Met de gecorrigeerde momenten bepaalt men dan de onbepaalde parameters, die in de Pearsonvergelijking voorkomen en kan dan de zo gevonden Pearsonkromme als de gezochte frequentiekromme aannemen.

Bovenstaande correctie op toevallige meetfouten is in een gelijksoortig Amerikaans onderzoek, waarbij in 1939 en 1940 ruim 10.000 vrouwen gemeten werden, niet toegepast, zodat het Nederlandse onderzoek te prefereren is. Andere oorzaken, dat het Amerikaanse onderzoek voor Nederland minder bruikbaar is, zijn gelegen in het feit, dat in Amerika naaktmetingen verricht zijn en in de omstandigheid, dat de Nederlandse vrouw andere lichaamsafmetingen heeft dan de Amerikaanse. De Nederlandse vrouw is gemiddeld 1½ cm langer en 6 kg zwaarder en zij heeft 7½ cm meer bovenwijdte, 6½ cm meer taille en ook 6½ cm meer heupomvang. Behalve dat naaktmetingen voor de confectieindustrie minder geschikt zijn, zullen die metingen ook geen zuivere weerspiegeling geven van het publiek in de confectiemagazijnen, daar bij vrijwillige aanmelding personen met goede proporties zullen overwegen. In de bewerking van de meetresultaten stemmen het Amerikaanse en het Nederlandse onderzoek ook niet overeen. Bij het Amerikaanse onderzoek in een maatsysteem ontworpen, dat het aantal niet passende kleding-

stukken minimaal maakt, terwijl bij het Nederlandse onderzoek een maatsysteem is ontworpen, dat de pompkosten reduceert en dat dus economischer is. In De Juiste Maat treft men een uitvoerige analyse van het Amerikaanse onderzoek en ook van een Engels onderzoek aan.

Als men zich afvraagt, welke de lezerskring van De Juiste Maat kan zijn, dan komen aan de ene kant in aanmerking personen uit de confectie-industrie en uit het confectiebedrijf, die uit de tabellen hun noodzakelijke gegevens kunnen aflezen en die zich uit het eerste gedeelte een begrip kunnen vormen van de gevolgde methoden. Aan de andere kant komen in aanmerking personen met belangstelling voor de statistiek. Deze laatste groep vindt in De Juiste Maat geen leerboek der statistiek, aangezien feitelijk in hoofdzaak alleen de regressietheorie, die echter belangrijk is voor de practijk, wordt beschreven, maar terloops komen vele statistische begrippen ter sprake en zodoende kan men op een buitengewoon aangename en instructieve wijze kennismaken met de statistische gedachtengang en begripsvorming die zozeer verschilt van die in de zuivere wiskunde. Uit een uitgewerkt voorbeeld, dat van alle zijden wordt belicht, neemt men vlugger de voornaamste begrippen op. Lezing van dit boek zal ongetwijfeld de belangstelling voor de statistiek vermeerderen en misschien voeren tot verdere studie in dit interessante vak. Uit de opzet van het boek in drie gedeelten blijkt dat de schrijvers een oplossing hebben moeten zoeken voor het probleem waarvoor iedere statisticus komt te staan, n.l. dat hij de methoden der statistiek ook begrijpelijk moet maken voor niet-statistici. Deze zelfde moeilijkheid deed zich ook weer voor in deze boekbespreking, waarin noodgedwongen de inhoudsweergave een overwicht moest krijgen over de inhoudsbespreking.

J. M. Storch.

RECTIFICATIE.

Boven het tweede gedeelte van het artikel van Dr Bunt in aflevering II blz. 72 staat: Inrichting van het onderzoek en samenvatting van de resultaten. Dit behoort te zijn:

Een onderzoek naar de overlading van het programma voor de wiskunde bij het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs II

door Dr L. N. H. Bunt

EEN ONDERZOEK NAAR DE OVERLADING VAN HET PROGRAMMA VOOR DE WISKUNDE BIJ HET VOORBEREIDEND HOGER EN MIDDELBAAR ONDERWIJS III

door

DR L. N. H. BUNT

III

VERSLAGEN VAN ENKELE KLASSEN.

Op grond van de gegevens welke ons door de medewerkers werden verstrekt, hebben wij volgens het schema dat in hoofdstuk I werd beschreven, van het aandeel van elk dezer medewerkers een verslag samengesteld. Deze verslagen zijn sectiegewijs samengevoegd.

Van drie klassen, behorende tot drie verschillende secties, hebben wij het verslag in dit hoofdstuk opgenomen. Deze zijn ontleend aan de secties Gymnasium Algebra B (afgekort G.A.B.), H.B.S. Algebra B (H.A.B.) en H.B.S. Algebra D (H.A.D.). Hierdoor is getracht een beeld te geven van het wel zeer heterogene materiaal; evenwel moet in aanmerking worden genomen, dat vele van de niet opgenomen verslagen een kleinere omvang hebben dan de hier gepubliceerde.

De medewerkers zijn door een nummer aangeduid. Een afkorting als G.A.B. 1 betekent: medewerker no. 1 van de sectie Gymnasium Algebra B.

Voor de betekenis van de lijsten A, B, C en D, zie hoofdstuk I, §§ 15 en 26. Ter voorkoming van misverstand vestig ik — voor zover nodig — de aandacht van de lezer er op, dat enkele medewerkers slechts van een gedeelte van het onderwerp hunner sectie de behandeling in hun verslag opnamen. De kruisjes voor een dergelijke medewerker geven dus niet volledig datgene aan, wat deze pleegt te behandelen.

Sectie Gymnasium Algebra B†).

Onderwerp: gewone en ingeklede vergelijkingen met meer dan één onbekende.

A. Behandelde begrippen.

	G.A.A. 2	G.A.B. 1	G.A.B. 2
1. Vergelijking met meer dan één onbekende	×	×	×
2. Onbepaalde vergelijking			×
3. Stel wortels van een vergelijking met twee onbekenden	×	×	×
4. Graad van een vergelijking met meer dan één onbekende	×	×	×
5. Oplossing van vergelijkingen met twee of meer onbekenden	×	×	×
6. Elimineren	×	×	×
7. Eliminatiemethode	×	×	×
8. Homogene vergelijking	×	×	
9. Algemene gedaante van een lineaire vergelijking met twee onbekenden			×
10. Notatie $V = 0$ voor $ax + by + c = 0$			×

†) Zie voetnoot [5]) bij de tabel van hoofdstuk I, § 9.

B. Behandelde eigenschappen en methoden.

	G.A.A. 2	G.A.B. 1	G.A.B. 2
1. De methode van optelling en aftrekking bij het oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden	×	×	×
2. De substitutiemethode bij idem	×	×	×
3. De methode van gelijkstelling bij idem			×
4. Het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarvan één van hogere graad is, door de hogeregraadsvergelijking te ontbinden	×	×	
5. Het oplossen van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden	×	×	×
6. Het berekenen van de verhouding van n onbekenden uit $n - 1$ homogene vergelijkingen	×	×	
7. Men mag de beide leden van een vergelijking met twee onbekenden met hetzelfde getal vermeerderen of verminderen	§)	§)	×
8. Men mag de beide leden van een vergelijking met twee onbekenden met eenzelfde van nul verschillend getal vermenigvuldigen of er door delen	§)	§)	×
9. Een stelsel van twee vergelijkingen is gelijkwaardig met één van die vergelijkingen en de som (het verschil) van de twee vergelijkingen	×	×	
10. Een stel wortels van de vergelijkingen $V_1 = 0$ en $V_2 = 0$ is ook een stel wortels van de vergelijking $kV_1 + lV_2 = 0$			×

§) Zie lijst D, blz. 50.

C. Behandelde vraagstukkentypen.

	G.A.A. 2	G.A.B. 1	G.A.B. 2
1. Toepassing van B1	×	×	×
2. Toepassing van B2	×	×	×
3. Toepassing van B3			×
4. Toepassing van B4	×	×	
5. Toepassing van B5	×	×	×
6. Toepassing van B6	×	×	
7. Het oplossen van een stelsel van drie vergelijkingen, waarvan één kwadratisch is	×	×	
8. Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen, door het stellen van nieuwe onbekenden			×
9. Het elimineren van twee onbekenden uit drie vergelijkingen	×	×	
10. Ingeklede vergelijkingen met twee onbekenden	×	×	×
11. Ingeklede vergelijkingen met meer dan twee onbekenden	×	×	×

D. Benodigde vroegere leerstof.

	G.A.A.2	G.A.B. 1	G.A.B. 2
*1. Het oplossen van een vierkantsvergelijking door ontbinden in factoren	×	×	
2. Het begrip „gelijkwaardigheid van vergelijkingen"	×	×	
3. Men mag de beide leden van een vergelijking met eenzelfde getal vermeerderen of verminderen	†)	†)	§)
4. Men mag de beide leden van een vergelijking met eenzelfde getal $\neq 0$ vermenigvuldigen of er door delen	†)	†)	§)
5. Het oplossen van een lineaire vergelijking met één onbekende	×	×	×
*6. Het oplossen van een betrekking tussen enkele grootheden naar één van die grootheden	×	×	
7. De begrippen „identieke" en „valse vergelijking"	×	×	
8. Het begrip „gehele vergelijking"	×	×	

---

†) Voor een willekeurige vergelijking.

§) Voor een lineaire vergelijking met één onbekende.

* Speelt uitsluitend een rol bij één of meer van de gemaakte vraagstukken.

1. *Docent.*
G.A.B. 1.

2. *Gebruikt boek.*
Vredenduin en van Haselen: Algebra II, 4e druk.

3. *Behandelde leerstof.*
§§ 12, 13, 15, 16, 18, 19, 23.

4. *Gemaakte vraagstukken.*
§ 14: 1 t/m 4, 5*a*, *d*, 6*a*, *d*, 7, 8*a*, *b*, 9 t/m 14*b*;
§ 17: 1*a* t/m 9*a*, 10*b* t/m 13*b*, 14*c*;
§ 20: 1 t/m 6*a*, 8, 9, 12;
§ 22: 1, 4 t/m 7, 10, 12*a*, 13*b*, 15;
§ 24: 1 t/m 11;
§ 25: 1 t/m 6, 8 t/m 11.

5. *Extra overzichten, uitbreidingen, dictaat, enz.*
Geen gegevens.

6. *Herhalingen van vroegere leerstof.*
Zie lijst D, blz. 131; overigens geen gegevens.

7. *Tijd, besteed aan leerstof en vraagstukken, met inbegrip van de proefwerken.*
23 lesuren.

8. *Tijd, besteed aan huiswerk.*
$7\frac{1}{2}$ uur.

9. *Behandelde begrippen.*
Zie lijst A, blz. 130.
Afhankelijkheid, onafhankelijkheid en strijdigheid van lineaire vergelijkingen met twee onbekenden.

10. *Behandelde eigenschappen.*
Zie lijst B, blz. 130.
Voorwaarden voor afhankelijkheid, onafhankelijkheid en strijdigheid van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden, langs algebraïsche weg afgeleid.

11. *Behandelde vraagstukkentypen.*
Zie lijst C, blz. 131.
Parameters in de coëfficienten van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden zodanig bepalen, dat deze vergelijkingen afhankelijk, onafhankelijk of strijdig zijn.
Een vergelijking opstellen, strijdig met een gegeven vergelijking, waaraan een gegeven stel waarden voldoet.

12. *Moeilijke of om andere rèdenen tijdrovende gedeelten of vraagstukken.*

a. Nauwkeurig cijferen.
b. Ontbinden in factoren.
c. De tweede wortel van $x^2 = 4$ wordt vergeten.
d. Het combineren van twee evenredigheden.

13. *Proefwerken.*

Proefwerk I (opgegeven na 5 lesuren).

Los x en y op uit:

1. $3x - 5y = 8$
$2x + 7y = 15.$

2. $2(x - y) - 3(x + y) = -\frac{13}{6}$

$4(x - 2y - 1) - 3(2x - 1) = -\frac{14}{3}.$

3. $\frac{3x + 1}{2} = y$

$\frac{2x}{5} - \frac{y}{10} = -\frac{1}{20}.$

4. $x = 2y + 5$
$y^2 + 3x + y = 9.$

5. $ax + by = 2ab$
$a^2x - b^2y = a^2b - ab^2.$

Proefwerk II (opgegeven na 13 lesuren).

1. Los x, y en z op uit: $3x - 2y = -3$
$3y - 2z = -2$
$3z - 2x = 5.$

2. Los x en y op uit: $(x - 5)(3x + y + 1) + 2y^2 =$
$(y - 5)(x + 2y) + 3x^2$
$x : (y - 2) = 5 : 9.$

3. Los x en y op uit: $x^2 + xy = 0$
$2x^2 + xy - y^2 - 2y - 1 = 0.$

4. Bepaal a en b zo, dat de vergelijkingen

$$ax + (a + 3)y = 4a + 3$$
$$x + 2y = b - 1$$

afhankelijk zijn.

Proefwerk III (opgegeven na 17 lesuren).

1. Los x, y en z op uit: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y - z = 0$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + z = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}y - 1\frac{1}{8}z = 1.$$

2. Een getal van 3 cijfers wordt 594 groter, wanneer men de cijfers in omgekeerde volgorde neemt. Het cijfer der tientallen is het gemiddelde van de cijfers der eenheden en der honderdtallen. Het cijfer der eenheden is het vierde deel van het getal, gevormd door de beide andere cijfers. Bepaal het oorspronkelijke getal.

3. Los *op de eenvoudigste manier* op:

$$12\left(x - \frac{39}{71}\right) - 5\left(y - \frac{17}{83}\right) = -1$$

$$8\left(x - \frac{39}{71}\right) + 3\left(z + \frac{15}{113}\right) = 7$$

$$3\left(y - \frac{17}{83}\right) + 2\left(z + \frac{15}{113}\right) = 9.$$

Proefwerk IV (opgegeven na 19 lesuren).

1. Los x, y en z op uit: $xy - xz = 0$

$$2x + y = 3$$

$$x - y + z = 1.$$

2. Los x en y op uit: $\frac{x}{a+b} - \frac{x+y}{a-b} = -2b$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a - b.$$

3. Iemand betaalt een rekening van *f* 12,80 met guldens, kwartjes en dubbeltjes. Het aantal kwartjes is tweemaal zo groot als het aantal dubbeltjes. Het aantal guldens is één minder dan het dubbele van het aantal kwartjes. Met hoeveel guldens, kwartjes en dubbeltjes betaalde hij de rekening?

Proefwerk V (opgegeven na 21 lesuren).

1. Los x en y op uit: $x - 3y = 1$
$$2xy - 5y^2 = 3.$$

2. Los x, y, z en u op uit:
$$y - x = 1$$
$$2y + z = 1$$
$$u - z = 1$$
$$x + u = 1.$$

3. Van de vergelijkingen $ax + by = 1$
$$bx + ay = 7$$
is de oplossing $x = 5$, $y = 3$.

   Bereken a en b.

4. Een vader en zijn zoon zijn nu samen 41 jaar. Over 7 jaar is de vader 4 maal zo oud als de zoon. Hoe oud zijn beiden nu?

14. *Resultaten van de proefwerken en vergelijking daarvan met het geheel der schoolprestaties.*

Proefwerk I.

Vraagstuk	1		2		3		4		5		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	10	1	5	6	10	1	7	4	7	4	9	2
Defect > 2	7	0	4	3	5	2	3	4	5	2	4	3
Totaal	17	1	9	9	15	3	10	8	12	6	13	5
In %	94	6	50	50	83	17	56	44	67	33	72	28

Proefwerk II.

Vraagstuk	1		2		3		4		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	10	1	8	3	5	6	4	7	7	4
Defect > 2	6	0	3	3	2	4	0	6	2	4
Totaal	16	1	11	6	7	10	4	13	9	8
In %	94	6	65	35	41	59	23	77	53	47

Proefwerk III.

Vraagstuk	1		2		3		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	10	1	1	10	6	5	6	5
Defect > 2	6	1	1	6	2	5	2	5
Totaal	16	2	2	16	8	10	8	10
In %	89	11	11	89	44	56	44	56

Proefwerk IV.

Vraagstuk	1		2		3		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	10	1	4	7	1	10	4	7
Defect > 2	6	1	2	5	0	7	0	7
Totaal	16	2	6	12	1	17	4	14
In %	89	11	33	67	6	94	22	78

Proefwerk V.

Vraagstuk	1		2		3		4		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	4	6	10	0	10	0	8	2	10	0
Defect > 2	3	3	6	0	5	1	2	4	5	1
Totaal	7	9	16	0	15	1	10	6	15	1
In %	44	56	100	0	94	6	62	38	94	6

15. *De stof, waarop de proefwerkvragen betrekking hebben.*

Lijst C: 1 of 2; alleen wanneer de vergelijkingen geen extra bewerkingen vereisen, als het verdrijven van haakjes, en wanneer de coëfficienten getallen zijn, is het resultaat bevredigend. Lijst C: 5, 7''', 10'', 11'''.

16. *Aard van enkele fouten in de proefwerken.*

Proefwerk I.

Vraagstuk 1 en 3: Veel cijferfouten.

Vraagstuk 2: Cijferfouten bij het herleiden tot de algemene gedaante.

Vraagstuk 4: Sommigen hebben de substitutiemethode nog niet begrepen; anderen zijn vergeten hoe $y^2 + 7y = -6$ opgelost moet worden (vroeger behandeld).

Vraagstuk 5: Hier zijn de lettercoëfficienten voor enkelen een struikelblok.

Proefwerk II.

Vraagstuk 2: Meest cijferfouten; verder een onduidelijke conclusie aan het eind (de vergelijkingen waren strijdig); velen schreven er niets onder of alleen het woord „vals".

Vraagstuk 3: Uit de eerste vergelijking lieten sommigen alleen volgen $x = 0$, anderen alleen $x + y = 0$. Weer anderen hielden deze twee mogelijkheden niet duidelijk uit elkaar.

Vraagstuk 4: Verschillenden probeerden het „kunstje", maar dan verkeerd, aldus: $\frac{a}{1} = \frac{a+3}{2} = \frac{4a}{b} = \frac{3}{-1}$.

Proefwerk III.

Vraagstuk 1: Twee l.l. waren de methode vergeten.

Vraagstuk 2: Door niemand goed gemaakt. Wel stelden enkelen 1 of 2 vergelijkingen goed op, twee leerlingen zelfs alle drie. De laatste vergelijking $z = \frac{1}{4}(10x + y)$ gaf de meeste last. Voor de gemiddelde l.l. wordt dit vraagstuk te moeilijk geacht.

Vraagstuk 3: Door 9 l.l. goed aangepakt, hoewel een dergelijk vraagstuk nog niet was behandeld. De andere 9 zagen er in het geheel geen kans toe; ze werden afgeschrikt door de breuken tussen de haakjes en zagen niet in, dat nieuwe onbekenden gebruikt moesten worden. Trouwens dat „stellen" van nieuwe onbekenden doet er maar één, de anderen werken met de hele vormen tot het eind toe. Door cijferfouten stranden dan nog verschillenden voor het eind.

Proefwerk IV.

Vraagstuk 1: De meesten krijgen maar één stel wortels, doordat ze uit de eerste vergelijking alleen maar concluderen $y - z = 0$.

Vraagstuk 2: Hier waren het de breuken, waarover men struikelde.

Vraagstuk 3: Dit blijven altijd lastige opgaven voor de l.l. Men verwart „waarde" en „aantal" en produceert vergelijkingen als $x + y + z = 12{,}80$ of (de laatste vergelijking) $100x - 100 = 50y$.

Proefwerk V.

Vraagstuk 1: Velen wisten niet meer, hoe ze met $y^2 + 2y = 3$ verder moesten.

Vraagstuk 2: Practisch door iedereen goed gemaakt (een enkel cijferfoutje daargelaten). „En hiermee is dan m.i. aangetoond, dat ze n vergelijkingen van de 1e graad met n onbekenden kunnen oplossen."

Vraagstuk 3: „Zoiets hadden ze nog nooit gehad. Dat deze opgave zo goed gemaakt is, bewijst m.i. dat ze begrijpen, wat het betekent, als ik zeg, dat $x = 5$, $y = 3$ de oplossing van de vergelijking is."

SECTIE H.B.S. ALGEBRA B.

Onderwerp: rekenkundige en meetkundige reeks; oneindig voortlopende meetkundige reeks.

A. Behandelde begrippen.

	H.A.B. 1	H.A.B. 2
1. Reeks	×	×
2. Term van een reeks	×	×
3. Ranggetal van een term	×	×
4. Rekenkundige reeks (R.R.)	×	×
5. Algemene voorstelling van een term van een reeks		×
6. Verschil van een R.R.	×	×
7. Opklimmende R.R.	×	×
8. Afdalende R.R.	×	×
9. Rekenkundig middenevenredig	×	×
10. Som van een reeks	×	×
11. Hoofdformule van de R.R.	×	×
12. Interpoleren bij een R.R.	×	×
13. Meetkundige reeks (M.R.)	×	×
14. Reden van een M.R.	×	×
15. Opklimmende M.R. †)	×	×
16. Afdalende M.R.	×	×
17. Meetkundig middenevenredig	×	×
18. Hoofdformule van de M.R.	×	×
19. Interpoleren bij een M.R.	×	×
20. Oneindig voortlopende reeks	×	×
21. Limiet	×	×
22. Tot een getal naderen	×	
23. Som van een oneindig voortlopende M.R.	×	×

†) Omtrent de definitie hiervan bestaat in de gebruikte schoolboeken geen eenstemmigheid.

B. Behandelde eigenschappen en methoden.

	H.A.B. 1	H.A.B. 2
1. $l = a + (n - 1)v$	×	×
2. In een R.R. is de som van twee termen waarvan de ene even ver verwijderd is van de eerste term van de reeks als de andere van de laatste, gelijk aan de som van de eerste en de laatste	×	
3. $t_m = \frac{1}{2}(a + l)$	×	×
4. Van drie opeenvolgende termen van een R.R. is de middelste rekenkundig middenevenredig tussen de beide andere	×	×
5. $s = \frac{1}{2}n(a + l)$	×	×
6. $s = nt_m$	×	
7. $s = an + \frac{1}{2}n(n - 1)v$	×	
8. Een R.R. is bepaald door drie gegevens		×

	H.A.B. 1	H.A.B. 2
9. $v_1 = \dfrac{v}{p+1}$	×	×
10. $n_1 = n + (n-1)p$	×	
11. $l = ar^{n-1}$	×	×
12. In een M.R. is het product van twee termen waarvan de ene even ver verwijderd is van de eerste term van de reeks als de andere van de laatste, gelijk aan het product van de eerste en de laatste	×	
13. $t_m = \pm \sqrt{al}$	×	×
14. Van drie opeenvolgende termen van een M.R. is de middelste meetkundig middenevenredig tussen de beide andere	×	
15. $s = a \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$	×	×
16. $s = \dfrac{rl - a}{r - 1}$	×	×
17. Een M.R. is bepaald door drie gegevens		×
18. $r_1 = \sqrt[p+1]{r}$	×	×
19. $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{a}{1 - r}$	×	×

C. Behandelde vraagstukkentypen.

I. Rekenkundige reeks.

	H.A.B. 1	H.A.B. 2
1. Als drie van de grootheden a, v, n, l en s in getalwaarde gegeven zijn, de andere twee te berekenen	×	×
2. Twee van de grootheden a, v, n, l en s in de andere drie uit te drukken	×	×
3. Te onderzoeken of een reeks al of niet rekenkundig is, wanneer t_n als functie van n gegeven is	×	×
4. Idem, wanneer s_n als functie van n gegeven is	×	×
5. Vraagstukken, die leiden tot stelsels vergelijkingen waarvan hoogstens één kwadratisch is	×	×
6. Vraagstukken, die leiden tot stelsels vergelijkingen waarvan minstens twee kwadratisch zijn	×	×
7. Vraagstukken over interpoleren	×	×

II. Meetkundige reeks.

	H.A.B. 1	H.A.B. 2
8. Als I, 1, voor de grootheden a, r, n, l en s (met restricties t.a.v. n)	×	×
9. Als I, 2, voor de grootheden a, r, n, l en s (met restricties t.a.v. n)	×	×
10. Het met I, 3 analoge vraagstuk		×
11. Het met I, 4 analoge vraagstuk		×
12. De waarde van een repeterende breuk te berekenen	×	×
13. Type: Hoe groot moet het ranggetal van een term der reeks 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... minstens zijn, opdat die term kleiner dan 0,001 zal zijn	×	

		H.A.B. 1	H.A.B. 2
14.	Type: Hoeveel termen moet men van de reeks 1, ½, ¼, . . . minstens nemen, opdat de som van die termen minder dan 0,001 verschilt van de som van de reeks	×	
15.	Meetkundige toepassingen van de formule voor lim s_n . .	×	
16.	Vraagstukken, die leiden tot stelsels vergelijkingen van hogere graad welke door kunstgrepen moeten worden opgelost . .	×	×
17.	Vraagstukken over interpoleren		×
18.	Gemengde vraagstukken, bijv. leidende tot logarithmische of exponentiële vergelijkingen	×	

D. Benodigde vroegere leerstof.

		H.A.B. 1	H.A.B. 2
1.	Het oplossen van ongelijkheidsopgaven	×	
2.	Logarithmen	×	
3.	Wortelvormen	×	×
*4.	Het oplossen van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden, waarvan hoogstens één kwadratisch is	×	×
*5.	Idem van stelsels vergelijkingen van hogere graad door middel van kunstgrepen	×	×
*6.	Ontbinding in factoren	×	×
*7.	Het oplossen van logarithmische en exponentiële vergelijkingen	×	

* Speelt uitsluitend een rol bij één of meer van de gemaakte vraagstukken.

1. *Docent.*

H.A.B. 2.

2. *Gebruikt boek.*

Derksen en de Laive: Leerboek der Algebra III, uitg. B.

3. *Behandelde leerstof.*

§§ 260 t/m 267; 269; 271; 272.

4. *Gemaakte vraagstukken.*

§ 263: 1 t/m 7, 10, 13, 18, 20 t/m 26, 28, 29, 32, 35, 36;
§ 264: 1, 2, 3, 5, 6;
§ 268: 1 t/m 18, 20 t/m 24;
§ 269: 1;
§ 272: 1 t/m 7, 14, 15, 16;
Gemengde opgaven: 76, 77, 80, 100, 104.

5. *Extra overzichten, uitbreidingen, dictaat, enz.*

Vraagstukken met getallenvoorbeelden gedicteerd, omdat de eerste vraagstukken uit het boek te moeilijk geoordeeld werden. Aan het eind van de behandeling van de rekenkundige reeks gedicteerde extra vraagstukken:

a. $s_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$. Bewijs, dat de reeks rekenkundig is.

b. t_7 is middelevenredig tussen t_3 en t_{17}; $t_{15} = 1 + t_4 + t_{11}$. Bereken a en v.

c. $s_n = an^2 + bn$. Bewijs dat de reeks rekenkundig is.

Aan het eind van de behandeling van de meetkundige reeks:

d. $t_k = \frac{2^{k+3}}{5}$. Bewijs, dat de reeks meetkundig is.

e. $s_p = 3 \times 2^{2p} - 12$. Idem.

f. $s_n = 2 \times 3^n - 6n^2$. Is de reeks meetkundig? Rekenkundig?

g. $t_n = 3 \times 2^{n-1} + 5n + 1$. Gevraagd: s_n.

6. *Herhalingen van vroegere leerstof.*

Zie lijst D, blz. 141; overigens geen gegevens.

7. *Tijd, besteed aan leerstof en vraagstukken met inbegrip van de proefwerken.*

23 lesuren.

8. *Tijd, besteed aan huiswerk.*

Geen gegevens. Een der lesuren viel op Maandag, hiervoor werd geen huiswerk opgegeven.

9. *Behandelde begrippen.*

Zie lijst A, blz. 139.

10. *Behandelde eigenschappen.*

Zie lijst B, blz. 139 e.v.

Deze docent vindt de gangbare formule B 18 voor de reden na interpolatie niet volledig genoeg en wijzigt die als volgt:

voor p even is $r_1 = \sqrt[p+1]{r}$, voor p oneven is $r_1 = \pm\sqrt[p+1]{r}$.

(Een voorbeeld er van, hoe men gemakkelijk van kwaad tot erger vervalt. Bovendien is het nu nòg niet volledig, zie het geval: p oneven, $r < 0$.)

11. *Behandelde vraagstukkentypen.*

Zie lijst C, blz. 140 e.v.

12. *Moeilijke of om andere redenen tijdrovende gedeelten of vraagstukken.*

a. t_n en s_n als functie van n wordt moeilijk gevonden en moet een tweede maal besproken worden. Daarna wordt dóór de l.l. gevraagd het extra vraagstuk c (zie § 5) nog eens te behandelen. In totaal is dit onderwerp dus drie maal besproken.

b. De betekenis van § 260, 2e stuk is door de klas niet goed begrepen. Schrijfwijzen als $t_{p-1} - t_p = t_p - t_{p+1}$ blijven lang onduidelijk ($a - b = b - c$ blijkt een beter effect te geven). Vraag van een goede l.l.: is $t_{12} - t_3 = t_9$?

c. Enkele l.l. slagen er niet in de betrekking $l = ar^{n-1}$ op te lossen naar r.

d. Sommige vraagstukken over de M.R. leiden tot een macht van r, waarvan de exponent een R.R. is. Deze exponent wordt veelal niet als R.R. herkend.

e. Verscheidene l.l., waaronder enkele goede, begrepen niet de op het bord geschreven herleiding:

$3 \times 2^{2p} - 3 \times 2^{2p-2} = 3 \times 2^{2p-2}(2^2 - 1)$.

f. Een vraagstuk als § 263, nr. 35, waarin de rij der oneven getallen in groepen van n getallen wordt verdeeld en de som van de getallen uit de $n$de groep berekend moet worden, blijkt zonder speciale training niet gemaakt te kunnen worden.

g. Veel klachten over het cijferwerk. Berekeningen als

$\dfrac{16-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{256}}{1-\frac{1}{2}}$ en $10 \times \dfrac{1-(-\frac{1}{2})^{10}}{1-(-\frac{1}{2})}$ zijn voor veel l.l. te moeilijk.

h. Gesignaleerde vergissingen of fouten:

$4\frac{1}{2} \times 0 = 4\frac{1}{2}$.

Na het lezen van het gegeven $t_6 = 4$, verder werken met t_4 i.p.v. t_6.

$2 \times 3^{p-1} = 6^{p-1}$.

$\dfrac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = \left(\dfrac{2}{2}\right)^1$.

$\dfrac{16}{10^5} + \dfrac{16}{10^7} + \ldots = \dfrac{\frac{16}{10^5}}{1-\frac{1}{10^5}}$.

i. Voor enkele andere moeilijkheden, zie § 18, blz. 66 e.v.

13. *Proefwerken.*

Proefwerk I (opgegeven na 11 lesuren).

Rekenkundige reeks.

Rechts:

1. $t_1 \times t_5 = 44$, $t_6 - t_2 = 20$, $m = 52$ (middelste term). Bereken a, v, n en s.

2. $n = 5v$, $t_6 = 4t_2$, $l = 43$. Bereken s.

3. Interpoleert men tussen elk tweetal termen ener R.R. 1 term, dan is in de nieuwe reeks $t'_6 = 16$. Interpoleert men er 5 (tussen elk tweetal), dan is $t''_{14} = 14$. De som van de laatste reeks is 703. Bereken de som van de eerste reeks.

4. $s_n = \dfrac{2}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{1}{6}n$.

   a. Bereken t_n, daarna t_1, t_2, t_3 en t_4.

   b. Bewijs, dat de reeks niet rekenkundig is.

   c. Vorm een nieuwe reeks: $T_1 = t_2 - t_1$, $T_2 = t_3 - t_2 \ldots$ $T_n = t_{n+1} - t_n$. Bewijs, dat deze reeks rekenkundig is.

Links:

1. $t_3 + t_6 = 50$, $t_2 + t_7 = 34$, $l = 83$. Bereken a, v, n, s.

2. $t_2 = 24$, $t_5 = -5v$, $s = 126$. Bereken v en n.

3. Interpoleert men 3 termen tussen elk tweetal opvolgende termen van een R.R., dan is in de nieuwe reeks $t_2' = 4$, $t_7' = 14$, $m' = 26$. Bereken de som van de oorspronkelijke reeks.

4. $s_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$. Verder als som 4 voor *rechts*.

Proefwerk II (opgegeven na 22 lesuren).

Meetkundige reeks.

1. $t_3 = 4$, $t_8 = \frac{1}{8}$, $m = \frac{1}{2}$ (middelste term). Bereken s.
2. $(a - 1)$, $(2a + 2)$ en $(7a + 1)$ vormen in deze volgorde een M.R. Bereken a.
3. Oneindig voortlopende M.R.
   $s = 243$, $t_5 + t_8 = 20\frac{20}{27}$, $t_6 + t_7 = 17\frac{7}{9}$. Bereken de eerste term.
4. $s_n = \frac{27}{4}\left(1 - \frac{1}{(-3)^n}\right)$.
   a. Bewijs dat de reeks meetkundig is.
   b. Als $t_k - t_{k+2} = \frac{8}{81}$ is, hoe groot is dan k?
   c. Bereken de som van de reeks bij oneindig voortlopen.

14. *Resultaten van de proefwerken en vergelijking daarvan met het geheel der schoolprestaties.*

Proefwerk I.†)

Vraagstuk	1		2		3		4		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect ≦ 2	10	2	10	2	5	7	1	11	9	3
Defect > 2	8	0	6	2	2	6	0	8	5	3
Totaal	18	2	16	4	7	13	1	19	14	6
In %	90	10	80	20	35	65	5	95	70	30

†) Uit de ons verstrekte gegevens is niet op te maken hoe de resultaten over „links" en „rechts" verdeeld zijn.

Proefwerk II.

Vraagstuk	1		2		3		4		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect ≦ 2	10	0	9	1	8	2	0	10	10	0
Defect > 2	6	1	5	2	2	5	0	7	4	3
Totaal	16	1	14	3	10	7	0	17	14	3
In %	94	6	82	18	59	41	0	100	82	18

15. *De stof waarop de proefwerkvragen betrekking hebben.*

Het in formule brengen van gegevens d.m.v. enkele formules van lijst B.

Van lijst C: 1, 4, 5, 10, 16.

Uit de gegevens is niet op te maken, welke van deze vraagstukkentypen in voldoende mate beheerst worden.

Evenals bij H.A.B. 1 vloeien de onvoldoende resultaten niet voort uit onbekendheid met de theorie, maar uit omstandigheden die buiten het eigenlijke onderwerp liggen.

16. *Aard van enkele fouten in de proefwerken.*

Proefwerk I.

a. Zo maar ergens door delen, bijv. $30 - 3n$ wordt zo maar $10 - n$.

b. Zo maar ergens mee vermenigvuldigen: $s_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ wordt zo maar $2n^3 - 3n^2 - 5n$ (dit kwam drie maal voor).

c. $t_2 = a + 2v$.

d. s_{n-1} uit s_n vol cijferfouten „de eeuwige handicap".

e. $252 = 5n - 3n^2$ wordt niet als vierkantsvergelijking herkend.

f. Verkeerd lezen: in vraagstuk 3 (links)wordt de som van de oude reeks i.p.v. de som van de nieuwe reeks berekend.

g. $(n - 1)^3$ verkeerd ontwikkeld.

h. n en n'' verward (bij vraagstuk 3).

i. Een gebroken waarde van n wordt als antwoord aanvaard, bijv. als n uit een vierkantsvergelijking opgelost is.

j. Eén leerling kan uit s_n niet t_n afleiden.

k. Twee leerlingen kunnen uit a, v en s of a, v en l niet n afleiden.

Opmerking. Vele van deze fouten hebben met de theorie van de reeksen weinig te maken.

Proefwerk II.

a. Uit het bestaan van een middelste term wordt niet afgeleid, dat de reeks eindig is.

b. $(7a + 1)(a - 1) = 7a^2 - 1$ (dit kwam vier maal voor).

c. $\frac{18 + 2\sqrt{111}}{6} = 3 + 2\sqrt{111}$.

d. $\dfrac{1+r^3}{r(1+r)} = \dfrac{7}{6}$ niet opgelost, omdat $1 + r^3$ niet als som van derde machten herkend is.

e. $r = \dfrac{3}{2}$ niet verworpen bij een convergente reeks.

f. In $\dfrac{1}{(-3)^{n-1}} - \dfrac{1}{(-3)^n}$ wordt niet of verkeerd afgetrokken.

g. $\dfrac{(-3)^{n-2}}{(-3)^{n-1}} = -3$.

h. $4 \times (-3)^n = -12^n$ (een soortgelijke fout is al eens klassikaal besproken).

Opmerking. In vraagstuk 4 zaten de meeste fouten. De methode was de meesten wel bekend, maar vanaf het begin raakten de l.l. in rekenfouten verstrikt.

17\. *Peil van de klas.*

Onvoldoende.

18\. *Slotopmerkingen.*

1. Docent H.A.B. 2 merkt op, dat naar zijn overtuiging ,,de l.l. het onderwerp onder de knie hadden, uitgezonderd zij, die te dom zijn, niet alleen voor wiskunde, maar ook voor andere vakken." Dit oordeel moet op grond van niet in het verslag vermelde ervaringen tijdens de lessen zijn verkregen, het klopt althans niet met de resultaten van proefwerk I.
2. Door de medewerkers in deze sectie wordt vermeld, in overeenstemming met hetgeen wij opmerkten in de paragrafen 15 van deze sectie, dat een groot deel van de aan dit onderwerp bestede tijd in beslag wordt genomen door het oefenen in het maken van vraagstukken die met het eigenlijke onderwerp weinig te maken hebben of gekunstelde toepassingen van de formules zijn. Laatstgenoemde opgaven eisen een zekere mate van vertrouwdheid met het toepassen van ,,kunstgrepen", welke specifiek zijn voor dit soort vraagstukken. Wij noemen er enkele:

   a. aftrekken en delen van de overeenkomstige leden van twee vergelijkingen;

   b. soms de formule $s = a\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ toepassen, soms de som uitschrijven;

3. in deze formule voor een deel van ar^n iets anders invullen;
4. bij een aantal termen de factor ar^p buiten haakjes brengen;
5. denken aan stelling B 2.

Voorts wordt hierbij een aanzienlijke geoefendheid verlangd in:

1. het stellen van handige onbekenden;
2. het oplossen van stelsels vergelijkingen met lettercoëfficienten;
3. het oplossen van niet-lineaire stelsels vergelijkingen;
4. het kunnen werken met letterexponenten.

c. Docent H.A.B. 2 merkt op, dat een vraagstuk als het volgende vrij lastig is:
Van een R.R. bedraagt de som van de eerste vier termen 46, de som van de laatste vier is 130 en de som van alle termen is 242; bepaal die reeks (vgl. het eerste vraagstuk van proefwerk I bij H.A.B. 1).
Wij zijn het hiermee eens, en zouden dergelijke vraagstukken tot de puzzles willen rekenen, die hoogstens geschikt zijn om een uitblinkende l.l. te animeren, maar waaraan in de les (of thuis) geen kostbare tijd mag worden besteed. Immers, ook goede l.l. komen meestal niet op het idee, dat $a + l$, en dus n, gevonden wordt door te bedenken, dat $4(a + l)$ bekend is. Bovendien kan het vinden van het alternatief, het opstellen van de vergelijkingen

$$4a + 6v = 46$$
$$4a + (4n - 10)v = 130$$
$$\tfrac{1}{2}n\{2a + (n - 1)v\} = 242,$$

bij een intelligente l.l. belemmerd worden door de vrees, dat hij op de verkeerde weg is, omdat de laatste vergelijking van hogere graad is; terwijl een minder intelligente, maar braaf rekenende l.l. wellicht door gestadig verder werken toevallig ontdekt, dat de factor $2a + (n - 1)v$ door vereenvoudiging en optelling uit de eerste twee vergelijkingen te vinden is.